
أكثروا من
الصلاة على النبي

made by Mansy

صلى ع النبى وإدعيلى دعوة حلوة

#دفعة المنوفية 2022

#قناة تالتة ثانوى 2022


الجـزء الخـاص بالإجـابات
2022
التفـاضل و التكـامل
المعاصر
3
ثانوى
إعداد نخبة من خبراء التعليم

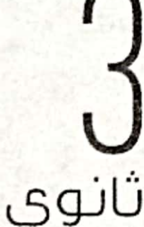


الرياضيات البحتة

التفاضل و التكامل

الجزء الخاص بالإجابات



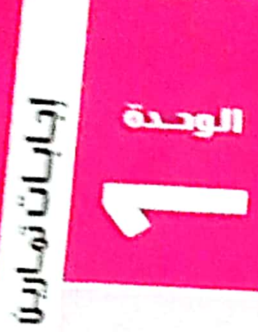


ثانوى

إعداد نخبة من خبراء التعليم



مكتبة الطلبة
للطبع و النشر و التوزيع
٣ شارع كامل صدقى - الفجالة
تليفون ٢٥٩٠٢٩٩٧ - ٢٥٩٣٧٧٩١ - ٠٢/٢٥٩٣٤٠١٢
e-mail: info@elmoasserbooks.com
www.elmoasserbooks.com
الخط الساخن ١٥٠١٤



الوحدة 1

إجابات تمارين

الاشتقاق وتطبيقاته

إجابات تمارين 1

1

(١) دص/دس = − قا^٢ ٥ س × ٥ = − ٥ قا^٢ ٥ س

(٢) دص/دس = − قا ٢ س ظا ٢ س × ٢
= − ٢ قا ٢ س ظا ٢ س

(٣) دص/دس = قا ٧ س ظا ٧ س × ٧
= ٧ قا ٧ س ظا ٧ س

(٤) دص/دس = − قا (س/٢) ظا (س/٢) × ١/٢
= − ١/٢ قا (س/٢) ظا (س/٢)

(٥) دص/دس = قا (٣/٤ س) ظا (٣/٤ س) × ٣/٤
= ٣/٤ قا (٣/٤ س) ظا (٣/٤ س)

(٦) دص/دس = قا (٤ س + ٢) ظا (٤ س + ٢) × ٤
= ٤ قا (٤ س + ٢) ظا (٤ س + ٢)

(٧) دص/دس = − قا (π − ٢ س) ظا (π − ٢ س) × − ٢
= ٢ قا (π − ٢ س) ظا (π − ٢ س)

(٨) دص/دس = − قا^٢ (س^٢ + ٢) × ٢ س
= − ٢ س قا^٢ (س^٢ + ٢)

(٩) دص/دس = ١ + (− قا^٢ ٢ س) × ٢
= ١ − ٢ قا^٢ ٢ س

(١٠) دص/دس = ١/٢ س^(−١/٢) + قا ٥ س ظا ٥ س × ٥
= ١/(٢ √س) + ٥ قا ٥ س ظا ٥ س

(١١) دص/دس = − قا^٢ (١/٤ س^٤) × ٢ س^٣
= − ٢ س^٣ قا^٢ (١/٤ س^٤)

(١٢) دص/دس = − قا √س ظا √س × ١/(٢ √س)
= − ١/(٢ √س) قا √س ظا √س

(١٣) دص/دس = قا (٣ س^٤ + ٢ س^٢ − ١) ظا (٣ س^٤ + ٢ س^٢ − ١) × (١٢ س^٣ + ٤ س)
= ٤ س (٣ س^٢ + ١) قا (٣ س^٤ + ٢ س^٢ − ١) ظا (٣ س^٤ + ٢ س^٢ − ١)

(١٤) دص/دس = − قا^٢ (π − ١/س) × ١/س^٢
= − ١/س^٢ قا^٢ (π − ١/س)

(١٥) دص/دس = ١٥ س^٢ + ٤ (− قا^٢ س)
= ١٥ س^٢ − ٤ قا^٢ س

(١٦) دص/دس = − ظا ٢ س × ٢ − ٤ (− قا^٢ (٣ س) × ٣)
= − ٢ ظا ٢ س + ١٥ قا^٢ ٣ س

(١٧) دص/دس = ٢ قا ٢ س ظا ٢ س × ٢ + ٢ (− قا ٣ س × قا ٣ س) × ٣
= ٦ قا ٢ س ظا ٢ س − ٦ قا ٣ س ظا ٣ س

(١٨) دص/دس = − ظا س + ٤ قا س ظا س

(١٩) دص/دس = قا (س/٤) ظا (س/٤) × ١/٤ + صفر
= ١/٤ قا (س/٤) ظا (س/٤)

(٢٠) دص/دس = ٢ (− قا √(١ + س^٢) ظا √(١ + س^٢)) × ٢ س / (٢ √(١ + س^٢))
= − ٢ س / √(١ + س^٢) قا √(١ + س^٢) ظا √(١ + س^٢)

2

(١) دص/دس = قا ٣ س + س قا ٣ س ظا ٣ س × ٣
= قا ٣ س + ٣ س قا ٣ س ظا ٣ س

(٢) دص/دس = ٢ س ظا ٣ س + س^٢ (− قا^٢ ٣ س) × ٣
= ٢ س ظا ٣ س − ٣ س^٢ قا^٢ ٣ س

(٣)–(١٢) [illegible]

3

(١)–(٨) [illegible]

إجابات تمارين ٤

أولاً مسائل على الاشتقاق الضمني

١

(أ) $ص^٢ - ٤ س^٢ + ٧ = ٠$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ٢ ص \frac{ء ص}{ء س} - ٨ س = ٠$

$\therefore \frac{ء ص}{ء س} = \frac{٤ س}{ص}$

(٧) نفرض أن (س) هو قياس الزاوية بالتقدير الستيني ، (هـ) هو قياس نفس الزاوية بالتقدير الدائري

$\therefore ص = جا س$

$\therefore ص = جا هـ \quad ، \quad هـ = س \times \frac{\pi}{١٨٠}$

$\therefore \frac{ء هـ}{ء س} = \frac{\pi}{١٨٠}$

② س^2 + ٣ ص^2 − ٩ = ٠ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ س + ٦ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{-س}{٣ ص}$

③ (س − ٣)^2 + (ص + ٢)^2 = ٢٥

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

٢ (س − ٣) + ٢ (ص + ٢) $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

$\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{-(س - ٣)}{(ص + ٢)}$ = $\frac{٣ - س}{ص + ٢}$

④ س^3 + ص^2 − ٧ س + ٤ ص = ٨

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

٣ س^2 + ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ − ٧ + ٤ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

(٢ ص + ٤) $\frac{ءص}{ءس}$ + (٣ س^2 − ٧) = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{٧ - ٣ س^2}{٢ ص + ٤}$

⑤ س^3 + ص^3 − ٢ س + ٣ ص^2 = ٨

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٣ س^2 + ٣ ص^2 $\frac{ءص}{ءس}$ − ٢ + ٦ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ (٣ ص^2 + ٦ ص) = ٢ − ٣ س^2

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{٢ - ٣ س^2}{٣ ص^2 + ٦ ص}$

⑥ س^2 + ٩ ص^2 − ٦ س ص = ٤

∴ (س − ٣ ص)^2 = ٤

∴ س − ٣ ص = ± ٢ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ١ − ٣ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{١}{٣}$

⑦ س^3 − ٥ س ص + ص^2 = ٤ س

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٣ س^2 − ٥ ص − ٥ س $\frac{ءص}{ءس}$

+ ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٤

∴ (٣ ص^2 − ٤ س) $\frac{ءص}{ءس}$ = ٤ − ٣ س^2 + ٥ ص

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{٤ - ٣ س^2 + ٥ ص}{٣ ص^2 - ٤ س}$

⑧ س ص = ١٠٠ (س + ص)

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ص + س $\frac{ءص}{ءس}$ = ١٠٠ + ١٠٠ $\frac{ءص}{ءس}$

∴ (س − ١٠٠) $\frac{ءص}{ءس}$ = ١٠٠ − ص

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{١٠٠ - ص}{س - ١٠٠}$

⑨ س^2 ص^2 = ١٠٠ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ س^2 × ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ + ص^2 × ٢ س = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{-٢ ص^2 س}{٢ س^2 ص}$ = $\frac{-ص}{س}$

⑩ س^2 ص + ص^2 س = ٢٥

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ س ص + س^2 $\frac{ءص}{ءس}$ + ص^2

+ ٢ س ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

∴ (س^2 + ٢ س ص) $\frac{ءص}{ءس}$ = −٢ س ص − ص^2

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{-ص (٢ س + ص)}{س (س + ٢ ص)}$

⑪ س^ن ص^ن = أ^ن (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ س^ن × ن ص$^{ن-١}$ $\frac{ءص}{ءس}$ + ص^ن

× ن س$^{ن-١}$ = صفر

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{-ص^ن \times ن س^{ن-١}}{س^ن \times ن ص^{ن-١}}$

= − $\left(\frac{ص}{س}\right)^ن$ × $\left(\frac{س}{ص}\right)^{ن-١}$ = $\frac{-ص}{س}$

⑫ س^ن + ص^ن = أ^ن (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ن س$^{ن-١}$ + ن ص$^{ن-١}$ $\frac{ءص}{ءس}$ = صفر

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{-ن س^{ن-١}}{ن ص^{ن-١}}$ = − $\left(\frac{س}{ص}\right)^{ن-١}$

١

① $\frac{س}{ص}$ + $\frac{ص}{س}$ = ٤

∴ س^2 + ص^2 = ٤ س ص (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

② س^3 + ص^3 = ٢ س^2 − ٢ ص^2

∴ ٦ س^2 − ٨ ص^2 = صفر

∴ ٣ س^2 − ٤ ص^2 = صفر (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٩ س^2 − ١٢ ص^2 $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{٩ س^2}{١٢ ص^2}$ = $\frac{٣}{٤}$ $\left(\frac{س}{ص}\right)^2$

③ $\sqrt{س}$ + $\sqrt{ص}$ = ٤ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ $\frac{١}{٢}$ س$^{-\frac{١}{٢}}$ + $\frac{١}{٢}$ ص$^{-\frac{١}{٢}}$ $\frac{ءص}{ءس}$ = صفر

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{-س^{-\frac{١}{٢}}}{ص^{-\frac{١}{٢}}}$ = $\frac{-\sqrt{ص}}{\sqrt{س}}$

④ ص + $\sqrt{س ص}$ = ٢ س^2 (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ + $\frac{١}{٢ \sqrt{س ص}}$ × [س $\frac{ءص}{ءس}$ + ص] = ٤ س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ + $\frac{س}{٢ \sqrt{س ص}}$ $\frac{ءص}{ءس}$ + $\frac{ص}{٢ \sqrt{س ص}}$ = ٤ س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{٤ س - \frac{ص}{٢ \sqrt{س ص}}}{١ + \frac{س}{٢ \sqrt{س ص}}}$

= $\frac{٨ س \sqrt{س ص} - ص}{٢ \sqrt{س ص} + س}$

⑤ جا ٢ س = ظا ٢ ص (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ جتا ٢ س = ٢ قا^2 ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{٢ جتا ٢ س}{٢ قا^2 ٢ ص}$

⑥ س جا ص = ص (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ س جتا ص $\frac{ءص}{ءس}$ + جا ص = $\frac{ءص}{ءس}$

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ (س جتا ص − ١) = − جا ص

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{جا ص}{١ - س جتا ص}$

⑦ جا ٢ ص = ص جتا ٢ س (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ جتا ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$

= $\frac{ءص}{ءس}$ جتا ٢ س + ص (− ٢ جا ٢ س)

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ (٢ جتا ٢ ص − جتا ٢ س)

= − ٢ ص جا ٢ س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{- ٢ ص جا ٢ س}{٢ جتا ٢ ص - جتا ٢ س}$

⑧ س ص + جا ص = ٥ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ص + س $\frac{ءص}{ءس}$ + جتا ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ (س + جتا ص) = − ص

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{-ص}{س + جتا ص}$

⑨ ٥ ص + جا ص = س^2 (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

⑩ جا س جتا ص = $\frac{١}{٢}$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ظا س ظا ص

⑪ ٢ ص = جا ٢ س جتا ص

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ $\frac{ءص}{ءس}$ = جا ٢ س × − جا ص $\frac{ءص}{ءس}$

+ جتا ص × ٢ جتا ٢ س

⑮

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ (٢ + جا ص جا ٢ س) = ٢ جتا ص جتا ٢ س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{٢ جتا ص جتا ٢ س}{٢ + جا ص جا ٢ س}$

⑫ س جتا ص + ص جتا س = ١

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ جتا ص + س (− جا ص) $\frac{ءص}{ءس}$ + $\frac{ءص}{ءس}$ جتا س

+ ص (− جا س) = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ (− س جا ص + جتا س)

= − جتا ص + ص جا س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{ص جا س - جتا ص}{جتا س - س جا ص}$

⑬ س^2 جا ص − ص^2 جا س = ٩

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ س جا ص + س^2 جتا ص $\frac{ءص}{ءس}$

− ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$. جا س − ص^2 جتا س = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ (س^2 جتا ص − ٢ ص جا س)

= ص^2 جتا س − ٢ س جا ص

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{ص^2 جتا س - ٢ س جا ص}{س^2 جتا ص - ٢ ص جا س}$

⑭ س قتا ص = ص قتا س (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ قتا ص + س (− قتا ص ظتا ص) $\frac{ءص}{ءس}$

= $\frac{ءص}{ءس}$ قتا س + ص (− ظتا^2 س)

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ (− س قتا ص ظتا ص − قتا س)

= − قتا ص − ص ظتا^2 س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{قتا ص + ص ظتا^2 س}{س قتا ص ظتا ص - قتا س}$

⑮ ظا ٢ س + ظا ص = س ص

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ قا^2 ٢ س + (− قا^2 ص) $\frac{ءص}{ءس}$ = ص + س $\frac{ءص}{ءس}$

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ (س + قتا^2 ص) = ٢ قتا^2 (٢ س) − ص

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{٢ قتا^2 (٢ س) - ص}{س + قتا^2 ص}$

⑯ جا^2 س + ٢ جتا ص + س ص = ٠

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ جا س جتا س + ٢ (− جا ص) $\frac{ءص}{ءس}$

+ ص + س $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ (س − ٢ جا ص) = − ص − ٢ جا س جتا س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{- ص - ٢ جا س جتا س}{س - ٢ جا ص}$

⑰ ص قا س + ظا س + س^2 ص = ٠

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ قا س + ص قا س ظا س + قا^2 س

+ ٢ س ص + س^2 $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ (قا س + س^2)

= − ص قا س ظا س − قا^2 س − ٢ س ص

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{- ص قا س ظا س - قا^2 س - ٢ س ص}{قا س + س^2}$

⑱ أ جتا ب س + ب جا أ ص = جـ

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ − أ ب جا ب س + أ ب جتا أ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = صفر

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{جا ب س}{جتا أ ص}$

٣

① ٢ س^2 + ٣ ص^2 = ٥ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٤ س + ٦ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = صفر

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{-٢ س}{٣ ص}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(١، ١)}$ = $\frac{-٢}{٣}$

② س^2 − ٣ س ص + ص^2 = ١١

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ س − ٣ س $\frac{ءص}{ءس}$ − ٣ ص + ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = صفر

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ (٢ ص − ٣ س) = ٣ ص − ٢ س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{٣ ص - ٢ س}{٢ ص - ٣ س}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(-١، ١)}$ = $\frac{٧}{٨}$

③ س ص^2 = ٣ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ص^2 + س (٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$) = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{-ص^2}{٢ س ص}$ = $\frac{-ص}{٢ س}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(٣، ١)}$ = $\frac{-١}{٦}$

④ س^4 − ٢ س^3 ص^2 + س ص^3 = ١

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٤ س^3 − ٦ س^2 ص^2 − ٢ س^3 (٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$)

+ س (٣ ص^2 $\frac{ءص}{ءس}$) + ص^3 = صفر

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ (− ٤ س^3 ص + ٣ س ص^2)

= − ص^3 + ٦ س^2 ص^2 − ٤ س^3

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{- ص^3 + ٦ س^2 ص^2 - ٤ س^3}{- ٤ س^3 ص + ٣ س ص^2}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(١، ١)}$ = ٣

④ س^2 − س ص + ص^2 = ٢٦

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ س − ص − س $\frac{ءص}{ءس}$ + ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ (− س + ٢ ص) = ص − ٢ س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{ص - ٢ س}{٢ ص - س}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)$ غير معرف

⑥ س $\sqrt{ص}$ + ص $\sqrt{س}$ = ١٦

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(٤، ٤)}$ = $\frac{١١}{٥}$

⑦ جا $\sqrt{٢}$ ص = ٢ س + ١ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

⑧

٤

① س^2 − ٣ س ص + ص^2 = ٥

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ $٢س - ٢ص - ٢س\frac{ءص}{ءس} + ٢ص\frac{ءص}{ءس} = ٠$

∴ $\frac{ءص}{ءس}(-٢س + ٢ص) = ٢ص - ٢س$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٢ص - ٢س}{-٢س + ٢ص}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(١ ، ٠)} = ١$

∴ ظاهـ $= ١$ ∴ ق(∠هـ) $= ٤٥^\circ$

② $س^٣ - س^٢ص - س - ٢ص = ٠$

∴ $٣س^٢ - س^٢\frac{ءص}{ءس} - ٢سص - ١ - ٢\frac{ءص}{ءس} = ٠$

∴ $\frac{ءص}{ءس}(-٢ - س^٢) = ٢سص + ١ - ٣س^٢$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٢سص + ١ - ٣س^٢}{-٢ - س^٢}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(٠ ، ١)} = \frac{١}{٢}$

∴ ظاهـ $= \frac{١}{٢}$ ∴ ق(∠هـ) $= ٢٦ ٣٤^\circ$

③ $\frac{س}{ص} - \frac{٤ص}{س} = ٣$ بالضرب × (س ص)

∴ $س^٢ - ٤ص^٢ = ٣سص$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ $٢س - ٨ص\frac{ءص}{ءس} = ٣س\frac{ءص}{ءس} + ٣ص$

∴ $\frac{ءص}{ءس}(٣س + ٨ص) = ٢س - ٣ص$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٢س - ٣ص}{٣س + ٨ص}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(١ ، -١)} = -١$

∴ ظاهـ $= -١$ ∴ ق(∠هـ) $= ١٣٥^\circ$

④ جا ٢س = ظا ص (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ٢ جتا $٢س =$ قا^٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٢ \text{ جتا } ٢س}{\text{قا}^٢ ص}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(\frac{\pi}{٤} ، \frac{\pi}{٤})} =$ صفر

∴ ظاهـ = صفر ∴ ق(∠هـ) = صفر°

ثانيًا مسائل على الاشتقاق البارامتري

٥

① $س = ٥ن + ٢$ ∴ $\frac{ءس}{ءن} = ٥$

، $ص = ١٦ن^٢ + ٩$ ∴ $\frac{ءص}{ءن} = ٣٢ن$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \div \frac{ءس}{ءن} = \frac{٣٢ن}{٥}$

$\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{ن=٥} = \frac{٣٢ \times ٥}{٥} = ٣٢$

② $س = أن^٢$ ∴ $\frac{ءس}{ءن} = ٢أن$

، $ص = ٢أن^٦$ ∴ $\frac{ءص}{ءن} = ١٢أن^٥$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \div \frac{ءس}{ءن} = \frac{١٢أن^٥}{٢أن} = ٦ن^٤$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{ن=١} = ٦$

③ $س = ٤ن$ ∴ $\frac{ءس}{ءن} = ٤$

، $ص = \frac{٤}{ن}$ ∴ $\frac{ءص}{ءن} = \frac{-٤}{ن^٢}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \div \frac{ءس}{ءن} = \frac{-٤}{ن^٢} \div ٤ = \frac{-١}{ن^٢}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{ن=٣} = \frac{-١}{٩}$

④ $س = (ن + ٧)(ن - ٢)$ منها $س = ن^٢ + ٥ن - ١٤$

∴ $\frac{ءس}{ءن} = ٢ن + ٥$

$ص = (ن^٢ + ١)(ن - ٢)$

منها $ص = ن^٣ - ٢ن^٢ + ن - ٢$

∴ $\frac{ءص}{ءن} = ٣ن^٢ - ٤ن + ١$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \div \frac{ءس}{ءن} = \frac{٣ن^٢ - ٤ن + ١}{٢ن + ٥}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{ن=١} = \frac{٣ - ٤ + ١}{٢ + ٥} =$ صفر

⑤ $س = \sqrt{٣ن - ٢}$ ∴ $\frac{ءس}{ءن} = \frac{٣}{٢\sqrt{٣ن - ٢}}$

، $ص = \sqrt{٤ن + ١}$

∴ $\frac{ءص}{ءن} = \frac{٤}{٢\sqrt{٤ن + ١}} = \frac{٢}{\sqrt{٤ن + ١}}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \div \frac{ءس}{ءن}$

$= \frac{٢}{\sqrt{٤ن + ١}} \div \frac{٣}{٢\sqrt{٣ن - ٢}}$

$= \frac{٤\sqrt{٣ن - ٢}}{٣\sqrt{٤ن + ١}}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءن}\right)_{ن=٢} = \frac{٤\sqrt{٣ \times ٢ - ٢}}{٣\sqrt{٤ \times ٢ + ١}} = \frac{٨}{٩}$

٦

① $س = ٣$ جتا ٢θ ∴ $\frac{ءس}{ء\theta} = -٦$ جا ٢θ

، $ص = ٤$ جا ٣θ ∴ $\frac{ءص}{ء\theta} = ١٢$ جتا ٣θ

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ء\theta} \div \frac{ءس}{ء\theta} = \frac{١٢ \text{ جتا } ٣\theta}{-٦ \text{ جا } ٢\theta} = \frac{-٢ \text{ جتا } ٣\theta}{\text{جا } ٢\theta}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{\theta=\frac{\pi}{٤}} = \frac{-٢ \text{ جتا } \frac{٣\pi}{٤}}{\text{جا } \frac{٢\pi}{٤}} = \sqrt{٢}$

② $س =$ جا $٢\pi\theta$

∴ $\frac{ءس}{ء\theta} = ٢\pi$ جتا $٢\pi\theta$ ، $ص =$ جتا $٢\pi\theta$

∴ $\frac{ءص}{ء\theta} = -٢\pi$ جا $٢\pi\theta$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ء\theta} \div \frac{ءس}{ء\theta} = \frac{-٢\pi \text{ جا } ٢\pi\theta}{٢\pi \text{ جتا } ٢\pi\theta}$

$= -$ظا $٢\pi\theta$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{\theta=\frac{١}{٦}} = -\sqrt{٣}$

③ $س = ٥$ جتا$^٢\theta$

∴ $\frac{ءس}{ء\theta} = ١٠$ جتا$\theta \times -$جا$\theta = -١٠$ جاθ جتاθ

، $ص = ٤$ جا$^٢\theta$ ∴ $\frac{ءص}{ء\theta} = ٨$ جا$\theta \times$ جتاθ

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ء\theta} \div \frac{ءس}{ء\theta} = \frac{٨ \text{ جا}\theta \text{ جتا}\theta}{-١٠ \text{ جا}\theta \text{ جتا}\theta} = \frac{-٤}{٥}$

④ $س = أ$ جتا$^٣\theta$

∴ $\frac{ءس}{ء\theta} = ٣أ$ جتا$^٢\theta \times -$جاθ

$= -٣أ$ جتا$^٢\theta$ جاθ

، $ص = أ$ جا$^٣\theta$ ∴ $\frac{ءص}{ء\theta} = ٣أ$ جا$^٢\theta \times$ جتاθ

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ء\theta} \div \frac{ءس}{ء\theta} = \frac{٣أ \text{ جا}^٢\theta \text{ جتا}\theta}{-٣أ \text{ جتا}^٢\theta \text{ جا}\theta} = -$ظا$\theta$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{\theta=\frac{\pi}{٤}} = -١$

⑤ $س = ٥ +$ قا$^٢ ٢\theta$

∴ $\frac{ءس}{ء\theta} = ٢$ قا ٢θ . قا ٢θ ظا $٢\theta \times ٢ = ٤$ قا$^٢ ٢\theta$ ظا ٢θ

، $ص = ١ -$ ظا ٢θ ∴ $\frac{ءص}{ء\theta} = -٢$ قا$^٢ ٢\theta$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-٢ \text{ قا}^٢ ٢\theta}{٤ \text{ قا}^٢ ٢\theta \text{ ظا } ٢\theta} = \frac{-١}{٢ \text{ ظا } ٢\theta}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{\theta=\frac{\pi}{٨}} = \frac{-١}{٢ \text{ ظا } \frac{٢\pi}{٨}} = -\frac{١}{٢}$

⑥ $س =$ قا$^٢\theta - ١$

∴ $\frac{ءس}{ء\theta} = ٢$ قاθ قاθ ظا$\theta = ٢$ قا$^٢\theta$ ظاθ

، $ص =$ ظاθ ∴ $\frac{ءص}{ء\theta} =$ قا$^٢\theta$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ء\theta} \div \frac{ءس}{ء\theta} = \frac{\text{قا}^٢\theta}{٢ \text{ قا}^٢\theta \text{ ظا}\theta} = \frac{١}{٢ \text{ ظا}\theta}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{\theta=\frac{\pi}{٤}} = \frac{١}{٢}$

⑦ $س = ٤$ قاθ ∴ $\frac{ءس}{ء\theta} = ٤$ قاθ ظاθ

، $ص = ب$ ظاθ ∴ $\frac{ءص}{ء\theta} = ب$ قا$^٢\theta$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ب \text{ قا}^٢\theta}{٤ \text{ قا}\theta \text{ ظا}\theta} = \frac{ب \text{ قتا}\theta}{٤}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{\theta=\frac{\pi}{٤}} = \frac{\sqrt{٢}\,ب}{٤}$

⑧ $س =$ جتا$\theta +$ جتا ٢θ

∴ $\frac{ءس}{ء\theta} = -$جا$\theta - ٢$ جا ٢θ

، $ص =$ جا$\theta +$ جا ٢θ

∴ $\frac{ءص}{ء\theta} =$ جتا$\theta + ٢$ جتا ٢θ

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ء\theta} \div \frac{ءس}{ء\theta} = \frac{\text{جتا}\theta + ٢ \text{ جتا } ٢\theta}{-\text{جا}\theta - ٢ \text{ جا } ٢\theta}$

$\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{\theta=\frac{\pi}{٣}} = \frac{\frac{١}{٢} + ٢(-\frac{١}{٢})}{-\frac{\sqrt{٣}}{٢} - ٢ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}} = \frac{\sqrt{٣}}{٩}$

⑨ $س = ٣$ جتا$\theta - ٢$ جتا$^٣\theta$

∴ $\frac{ءس}{ء\theta} = -٣$ جا$\theta + ٦$ جتا$^٢\theta$ جاθ

، $ص = ٣$ جا$\theta - ٢$ جا$^٣\theta$

∴ $\frac{ءص}{ء\theta} = ٣$ جتا$\theta - ٦$ جا$^٢\theta$ جتاθ

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٣ \text{ جتا}\theta - ٦ \text{ جا}^٢\theta \text{ جتا}\theta}{-٣ \text{ جا}\theta + ٦ \text{ جتا}^٢\theta \text{ جا}\theta}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{\theta=\frac{\pi}{٢}} = \frac{\text{صفر} - \text{صفر}}{-٣ + ٦ \times \text{صفر} \times ١} =$ صفر

⑩ $س = أ($جتا$\theta + \theta$ جا$\theta)$

∴ $\frac{ءس}{ء\theta} = أ(-$جا$\theta +$ جا$\theta + \theta$ جتا$\theta)$

$= أ\theta$ جتاθ

، $ص = أ($جا$\theta - \theta$ جتا$\theta)$

∴ $\frac{ءص}{ء\theta} = أ($جتا$\theta -$ جتا$\theta + \theta$ جا$\theta)$

$= أ\theta$ جاθ

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{أ\theta \text{ جا}\theta}{أ\theta \text{ جتا}\theta} =$ ظاθ

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{\theta=\frac{\pi}{٦}} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

٧

① بوضع : $ص = ٤س^٣ - ٩س^٢ + ٥$

، $ع = ٣س^٢ + ٧$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = ١٢س^٢ - ١٨س$

، $\frac{ءع}{ءس} = ٦س$

∴ $\frac{ءص}{ءع} = \frac{ءص}{ءس} \div \frac{ءع}{ءس} = \frac{١٢س^٢ - ١٨س}{٦س}$

$= ٢س - ٣$

② بوضع : $ص = (س + ٣)(س - ٢)$

$= س^٢ + س - ٦$

، $ع = \frac{س - ٣}{س + ٢}$ ، $\frac{ءص}{ءس} = ٢س + ١$

، $\frac{ءع}{ءس} = \frac{(س + ٢) \times ١ - (س - ٣) \times ١}{(س + ٢)^٢}$

$= \frac{٥}{(س + ٢)^٢}$

∴ $\frac{ءص}{ءع} = \frac{ءص}{ءس} \div \frac{ءع}{ءس} = (٢س + ١) \div \frac{٥}{(س + ٢)^٢}$

$= \frac{١}{٥}(٢س + ١)(س + ٢)^٢$

③ بوضع : $ص = \frac{س + ١}{س - ١}$ ، $ع = \sqrt{٢س + ١}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{(س - ١)(١) - (س + ١)(١)}{(س - ١)^٢} = \frac{-٢}{(س - ١)^٢}$

، $\frac{ءع}{ءس} = \frac{٢}{٢\sqrt{٢س + ١}} = \frac{١}{\sqrt{٢س + ١}}$

∴ $\frac{ءص}{ءع} = \frac{ءص}{ءس} \div \frac{ءع}{ءس} = \frac{-٢}{(س - ١)^٢} \div \frac{١}{\sqrt{٢س + ١}}$

$= \frac{-٢\sqrt{٢س + ١}}{(س - ١)^٢}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءع}\right)_{س=٤} = \frac{-٢\sqrt{٢(٤) + ١}}{(٤ - ١)^٢} = \frac{-٢}{٣}$

④ بوضع : ص = س − جاس ، ع = ١ − جتاس

∴ $\frac{ءص}{ءس} = ١ -$ جتاس ، $\frac{ءع}{ءس} =$ جاس

∴ $\frac{ءص}{ءع} = \frac{ءص}{ءس} \div \frac{ءع}{ءس} = \frac{١ - \text{جتاس}}{\text{جاس}}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءع}\right)_{س=\frac{\pi}{٣}} = \frac{١ - \frac{١}{٢}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}} = \frac{\sqrt{٣}}{٣}$

ثالثًا مسائل متنوعة

٨

① -١ ② ١٨ ③ $\frac{٣}{٨}$ ④ ١٠ ⑤ ٦ ⑥ $\frac{-١٠}{٢٧}$

٩

① (د)	② (د)	③ (د)	④ (ب)	⑤ (د)
⑥ (أ)	⑦ (أ)	⑧ (ب)	⑨ (ب)	⑩ (ب)
⑪ (جـ)	⑫ (جـ)	⑬ (أ)	⑭ (ب)	⑮ (د)
⑯ (جـ)	⑰ (ب)	⑱ (جـ)	⑲ (ب)	⑳ (جـ)
㉑ (د)	㉒ (جـ)	㉓ (أ)	㉔ (ب)	㉕ (د)
㉖ (د)	㉗ (د)	㉘ (جـ)	㉙ (جـ)	㉚ (ب)
㉛ (د)	㉜ (جـ)	㉝ (ب)	㉞ (جـ)	㉟ (جـ)
㊱ (ب)	㊲ (د)			

١٠

$ص = (س^٣ + ٢)^٧$ بالاشتقاق بالنسبة إلى ص

∴ $١ = ٧(س^٣ + ٢)^٦ \times ٣س^٢ \times \frac{ءس}{ءص}$

∴ $\frac{ءس}{ءص} = \frac{١}{٢١س^٢(س^٣ + ٢)^٦} \times \frac{(س^٣ + ٢)}{(س^٣ + ٢)}$

$= \frac{(س^٣ + ٢)}{٢١س^٢(س^٣ + ٢)^٧} = \frac{س^٣ + ٢}{٢١س^٢ص}$

١١

$س = (ص^٣ - ١)^٥$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$١ = ٥(ص^٣ - ١)^٤ \times ٣ص^٢\frac{ءص}{ءس}$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{١٥ص^٢(ص^٣ - ١)^٤} \times \frac{(ص^٣ - ١)}{(ص^٣ - ١)}$

$= \frac{ص^٣ - ١}{١٥ص^٢(ص^٣ - ١)^٥} = \frac{ص^٣ - ١}{١٥سص^٢}$

١٢

$\frac{٢}{\sqrt{س} + \sqrt{ص}} = \frac{٥}{١}$

$\sqrt{س} + \sqrt{ص} = \frac{٢}{٥}$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\frac{١}{٢}س^{-\frac{١}{٢}} + \frac{١}{٢}ص^{-\frac{١}{٢}}\frac{ءص}{ءس} =$ صفر

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{-س^{-\frac{١}{٢}}}{ص^{-\frac{١}{٢}}} = \frac{-\sqrt{ص}}{\sqrt{س}}$ ∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^٢ = \frac{ص}{س}$

١٣

$(ص - أ)^ن - (س - أ)^ن = أ^ن$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$ن(ص - أ)^{ن-١} \times \frac{ءص}{ءس} - ن(س - أ)^{ن-١} =$ صفر

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{(س - أ)^{ن-١}}{(ص - أ)^{ن-١}} = \left(\frac{س - أ}{ص - أ}\right)^{ن-١}$

١٤

$ص^٢ + ٢أس - أ^٢ = ٠$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$٢ص\frac{ءص}{ءس} + ٢أ =$ صفر $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-أ}{ص}$

∴ الطرف الأيمن $= \left(\frac{-أ}{ص}\right)^٢ + \frac{٢س}{ص}\left(\frac{-أ}{ص}\right)$

$= \frac{أ^٢ - ٢أس}{ص^٢} = \frac{ص^٢}{ص^٢} = ١$

١٥

$ص^٢ = س + \sqrt{١ + س^٢}$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$٢ص\frac{ءص}{ءس} = ١ + \frac{س}{\sqrt{١ + س^٢}}$

بالضرب × $(\sqrt{١ + س^٢})$

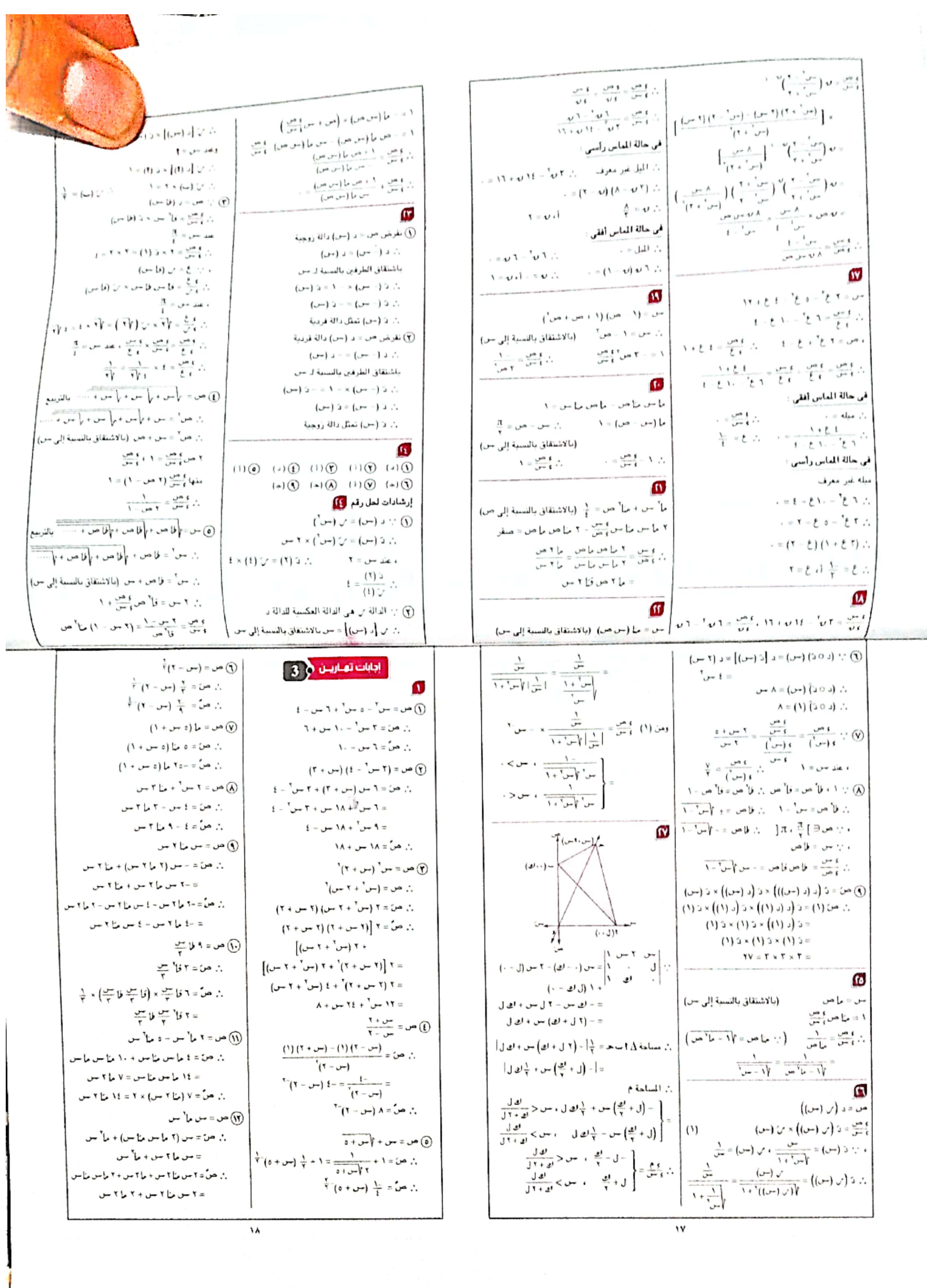
$٢ص\sqrt{١ + س^٢}\,\frac{ءص}{ءس} = \sqrt{١ + س^٢} + س$

$٢ص\sqrt{١ + س^٢}\,\frac{ءص}{ءس} = ص^٢$

∴ $٢\sqrt{١ + س^٢}\,\frac{ءص}{ءس} = ص$

١٦

$ص = \left(\frac{س^٢ - ٢}{س^٢ + ٢}\right)^ن$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)



إجابات تمارين 3

1

① ص = س^3 − ٥ س^2 + ٦ س − ٤

∴ ص' = ٣ س^2 − ١٠ س + ٦

∴ ص'' = ٦ س − ١٠

② ص = (٢ س^3 − ٤) (س + ٣)

∴ ص' = ٦ س^2 (س + ٣) + ٢ س^3 − ٤

= ٦ س^3 + ١٨ س^2 + ٢ س^3 − ٤

= ٨ س^3 + ١٨ س^2 − ٤

∴ ص'' = ٢٤ س^2 + ٣٦ س

③ ص = س^2 (س + ٢)^2

∴ ص' = ٢ س (س + ٢)^2 + ٢ س^2 (س + ٢)

∴ ص'' = ٢ (س + ٢)^2 + ٤ س (س + ٢) + ٤ س (س + ٢) + ٢ س^2

④ ص = $\frac{س + ٢}{س − ٢}$

∴ ص' = $\frac{(س − ٢)(١) − (س + ٢)(١)}{(س − ٢)^2}$ = $\frac{−٤}{(س − ٢)^2}$ = −٤ (س − ٢)$^{-2}$

∴ ص'' = ٨ (س − ٢)$^{-3}$

⑤ ص = س + $\sqrt{س + ٥}$

∴ ص' = ١ + $\frac{١}{٢\sqrt{س + ٥}}$ = ١ + $\frac{١}{٢}$ (س + ٥)$^{-\frac{1}{2}}$

∴ ص'' = −$\frac{١}{٤}$ (س + ٥)$^{-\frac{3}{2}}$

⑥ ص = (س − ٢)$^{\frac{3}{2}}$

∴ ص' = $\frac{٣}{٢}$ (س − ٢)$^{\frac{1}{2}}$

∴ ص'' = $\frac{٣}{٤}$ (س − ٢)$^{-\frac{1}{2}}$

⑦ ص = جا (٥ س + ١)

∴ ص' = ٥ جتا (٥ س + ١)

∴ ص'' = −٢٥ جا (٥ س + ١)

⑧ ص = ٢ س^2 + جتا ٢ س

∴ ص' = ٤ س − ٢ جا ٢ س

∴ ص'' = ٤ − ٤ جتا ٢ س

⑨ ص = س جا ٢ س

∴ ص' = جا ٢ س + ٢ س جتا ٢ س

∴ ص'' = ٢ جتا ٢ س + ٢ جتا ٢ س − ٤ س جا ٢ س

= ٤ جتا ٢ س − ٤ س جا ٢ س

⑩ ص = ٩ ظا $\frac{س}{٣}$

∴ ص' = ٣ قا^2 $\frac{س}{٣}$

∴ ص'' = ٦ قا $\frac{س}{٣}$ × قا $\frac{س}{٣}$ ظا $\frac{س}{٣}$ × $\frac{١}{٣}$

= ٢ قا^2 $\frac{س}{٣}$ ظا $\frac{س}{٣}$

⑪ ص = ٢ جا^2 س − ٥ جتا^2 س

∴ ص' = ٤ جا س جتا س + ١٠ جتا س جا س

= ١٤ جا س جتا س = ٧ جا ٢ س

∴ ص'' = ٧ × ٢ جتا ٢ س = ١٤ جتا ٢ س

⑫ ص = س جا^2 س

∴ ص' = جا^2 س + س (٢ جا س جتا س)

= جا^2 س + س جا ٢ س

∴ ص'' = ٢ جا س جتا س + جا ٢ س + ٢ س جتا ٢ س

= ٢ جا ٢ س + ٢ س جتا ٢ س

14

① (ء) ② (أ) ③ (أ) ④ (ء) ⑤ (أ)

⑥ (ء) ⑦ (أ) ⑧ (ء) ⑨ (ء)

إرشادات لحل رقم 24

① ∵ د (س) = ر (س^2)

∴ د' (س) = ر' (س^2) × ٢ س

، عند س = ٢ ∴ د' (٢) = ر' (٤) × ٤

∴ ر' (٤) = $\frac{د' (٢)}{٤}$

② ∵ الدالة ر هي الدالة العكسية للدالة د

∴ ر [د (س)] = س بالاشتقاق بالنسبة إلى س

13

① نفرض ص = د (س) دالة زوجية

∴ د (− س) = د (س)

بالاشتقاق الطرفين بالنسبة لـ س

∴ د' (− س) × −١ = د' (س)

∴ د' (− س) = − د' (س)

∴ د' (س) تمثل دالة فردية

② نفرض ص = د (س) دالة فردية

∴ د (− س) = − د (س)

بالاشتقاق الطرفين بالنسبة لـ س

∴ د' (− س) × −١ = − د' (س)

∴ د' (− س) = د' (س)

∴ د' (س) تمثل دالة زوجية

17

16

∴ ص = ٢ ع^3 − ٥ ع^2 + ٤ ع + ١٢

∴ $\frac{ءص}{ءع}$ = ٦ ع^2 − ١٠ ع + ٤

في حالة المماس أفقي

في حالة المماس رأسي

ميله غير معرف

∴ ٦ ع^2 − ١٠ ع + ٤ = ٠

∴ ٣ ع^2 − ٥ ع + ٢ = ٠

∴ (٣ ع − ٢) (ع − ١) = ٠

∴ ع = $\frac{٢}{٣}$ أو ع = ١

17

19

ص = (١ − س) (١ + س + س^2)

∴ ص = ١ − س^3

20

21

22

س = جا (س ص) (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

25

26

27

∴ المساحة م

١

(١) $\text{ص} = ٢ \text{ جا } ٢\text{س}$ $\quad \therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٤ \text{ جتا } ٢\text{س}$

$\therefore \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = -٨ \text{ جا } ٢\text{س}$

$\therefore \left(\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}\right)_{\text{س} = \frac{\pi}{٤}} = -٨$

(٢) $\text{ص} = \text{جا س} - \text{جتا س}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{جتا س} + \text{جا س}$

$\therefore \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = -\text{جا س} + \text{جتا س}$

$\therefore \left(\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}\right)_{\text{س} = \frac{\pi}{٤}} = \text{صفر}$

(٣) $\text{ص} = ٢\text{س جا س جتا س}$

$\therefore \text{ص} = \text{س جا } ٢\text{س}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{س} \times ٢ \text{ جتا } ٢\text{س} + \text{جا } ٢\text{س}$

$= ٢\text{س جتا } ٢\text{س} + \text{جا } ٢\text{س}$

$\therefore \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = -٤\text{س جا } ٢\text{س} + ٢ \text{ جتا } ٢\text{س} + ٢ \text{ جتا } ٢\text{س}$

$= -٤\text{س جا } ٢\text{س} + ٤ \text{ جتا } ٢\text{س}$

$\therefore \left(\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}\right)_{\text{س} = \pi} = ٤$

(٤) $\text{ص} = \text{س جتا س} - \text{جا س}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{س جا س} + \text{جتا س} - \text{جتا س}$

$= -\text{س جا س}$

$\therefore \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = -\text{س جتا س} - \text{جا س}$

$\therefore \left(\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}\right)_{\text{س} = \frac{\pi}{٢}} = -١$

(٥) $\text{ص} = \frac{٢\text{س} - ١}{\text{س} + ٣}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٢(\text{س} + ٣) - (٢\text{س} - ١)}{(\text{س} + ٣)^{٢}}$

$= \frac{٧}{(\text{س} + ٣)^{٢}} = ٧(\text{س} + ٣)^{-٢}$

$\therefore \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = -١٤(\text{س} + ٣)^{-٣}$

$\therefore \left(\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}\right)_{\text{س} = -٢} = -١٤$

٢

(١) $\text{ص} = \text{س}^{٥} - ٤\text{س}^{٣} + ٢$

$\therefore \text{ص}' = ٥\text{س}^{٤} - ١٢\text{س}^{٢}$

$\therefore \text{ص}'' = ٢٠\text{س}^{٣} - ٢٤\text{س}$

$\therefore \text{ص}''' = ٦٠\text{س}^{٢} - ٢٤$

(٢) $\text{ص} = \text{جا س}$ $\quad \therefore \text{ص}' = \text{جتا س}$

$\therefore \text{ص}'' = -\text{جا س}$ $\quad \therefore \text{ص}''' = -\text{جتا س}$

(٣) $\text{ص} = \text{جتا}(\pi - ٣\text{س})$

$\therefore \text{ص}' = -\text{جا}(\pi - ٣\text{س}) \times -٣ = ٣ \text{ جا}(\pi - ٣\text{س})$

$\therefore \text{ص}'' = ٣ \text{ جتا}(\pi - ٣\text{س}) \times -٣$

$= -٩ \text{ جتا}(\pi - ٣\text{س})$

$\therefore \text{ص}''' = -٩\left(-\text{جا}(\pi - ٣\text{س})\right) \times -٣$

$= -٢٧ \text{ جا}(\pi - ٣\text{س}) = -٢٧ \text{ جا } ٣\text{س}$

(٤) $\text{ص} = (٢\text{س} + ٧)^{٤} + \text{جا } ٢\text{س}$

$\therefore \text{ص}' = ٤(٢\text{س} + ٧)^{٣}(٢) + ٢ \text{ جتا } ٢\text{س}$

$= ٨(٢\text{س} + ٧)^{٣} + ٢ \text{ جتا } ٢\text{س}$

$\therefore \text{ص}'' = ٢٤(٢\text{س} + ٧)^{٢}(٢) - ٤ \text{ جا } ٢\text{س}$

$= ٤٨(٢\text{س} + ٧)^{٢} - ٤ \text{ جا } ٢\text{س}$

$\therefore \text{ص}''' = ٩٦(٢\text{س} + ٧)(٢) - ٨ \text{ جتا } ٢\text{س}$

$= ١٩٢(٢\text{س} + ٧) - ٨ \text{ جتا } ٢\text{س}$

(٥) $\text{د}(\text{س}) = \frac{٢\text{س}}{\text{س} + ١}$

$\therefore \text{د}'(\text{س}) = \frac{٢(\text{س} + ١) - ٢\text{س}}{(\text{س} + ١)^{٢}} = \frac{٢}{(\text{س} + ١)^{٢}}$

$= ٢(\text{س} + ١)^{-٢}$

$\therefore \text{د}''(\text{س}) = -٤(\text{س} + ١)^{-٣}$

$\therefore \text{د}'''(\text{س}) = ١٢(\text{س} + ١)^{-٤}$

(٦) $\text{ص} = \frac{\text{س} + ١}{\text{س} - ١}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{(\text{س} - ١)(١) - (\text{س} + ١)(١)}{(\text{س} - ١)^{٢}}$

$= \frac{-٢}{(\text{س} - ١)^{٢}} = -٢(\text{س} - ١)^{-٢}$

$\therefore \text{ص}'' = ٤(\text{س} - ١)^{-٣}$

$\therefore \text{ص}''' = -١٢(\text{س} - ١)^{-٤}$

(٧) $\text{ص} = ٢\text{س} + ٣\text{س}^{-١}$ $\quad \therefore \text{ص}' = ٢ - ٣\text{س}^{-٢}$

$\therefore \text{ص}'' = ٦\text{س}^{-٣}$ $\quad \therefore \text{ص}''' = -١٨\text{س}^{-٤}$

(٨) $\text{ص} = (٢\text{س} - ٥)^{\frac{١}{٢}}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{١}{٢}(٢\text{س} - ٥)^{-\frac{١}{٢}} \times ٢ = (٢\text{س} - ٥)^{-\frac{١}{٢}}$

$\therefore \text{ص}'' = -\frac{١}{٢}(٢\text{س} - ٥)^{-\frac{٣}{٢}} \times ٢ = -(٢\text{س} - ٥)^{-\frac{٣}{٢}}$

$\therefore \text{ص}''' = \frac{٣}{٢}(٢\text{س} - ٥)^{-\frac{٥}{٢}} \times ٢ = ٣(٢\text{س} - ٥)^{-\frac{٥}{٢}}$

(٩) $\text{ص} = \text{جا س جتا س} = \frac{١}{٢} \text{ جا } ٢\text{س}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{١}{٢} \text{ جتا } ٢\text{س} \times ٢ = \text{جتا } ٢\text{س}$

$\therefore \text{ص}'' = -\text{جا } ٢\text{س} \times ٢ = -٢ \text{ جا } ٢\text{س}$

$\therefore \text{ص}''' = -٢ \text{ جتا } ٢\text{س} \times ٢ = -٤ \text{ جتا } ٢\text{س}$

(١٠) $\text{ص} = ٢\text{س}^{٣} + \text{س جتا } ٢\text{س}$

$\therefore \text{ص}' = ٦\text{س}^{٢} + \text{س}(-٢ \text{ جا } ٢\text{س}) + \text{جتا } ٢\text{س}$

$= ٦\text{س}^{٢} - ٢\text{س جا } ٢\text{س} + \text{جتا } ٢\text{س}$

$\therefore \text{ص}'' = ١٢\text{س} - ٤\text{س جتا } ٢\text{س} - ٢ \text{ جا } ٢\text{س}$

$- ٢ \text{ جا } ٢\text{س}$

$= ١٢\text{س} - ٤\text{س جتا } ٢\text{س} - ٤ \text{ جا } ٢\text{س}$

$\therefore \text{ص}''' = ١٢ - ٤\text{س}(-٢ \text{ جا } ٢\text{س}) - ٤ \text{ جتا } ٢\text{س}$

$- ٨ \text{ جتا } ٢\text{س}$

$= ١٢ + ٨\text{س جا } ٢\text{س} - ١٢ \text{ جتا } ٢\text{س}$

٤

$\text{ص} = \text{س}^{٥} - ١٠\text{س}^{٤} + ٦٠\text{س}^{٢} + ١٢٠$

(بالاشتقاق بالنسبة لـ س)

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٥\text{س}^{٤} - ٤٠\text{س}^{٣} + ١٢٠\text{س}$

$\therefore \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = ٢٠\text{س}^{٣} - ١٢٠\text{س}^{٢} + ١٢٠$ $\quad (١)$

$\therefore \frac{\text{ء}^{٣}\text{ص}}{\text{ءس}^{٣}} = ٦٠\text{س}^{٢} - ٢٤٠\text{س}$

$\therefore \frac{\text{ء}^{٤}\text{ص}}{\text{ءس}^{٤}} = ١٢٠\text{س} - ٢٤٠$ ، عندما $\frac{\text{ء}^{٤}\text{ص}}{\text{ءس}^{٤}} = ٠$

$\therefore ١٢٠\text{س} - ٢٤٠ = ٠$ $\quad \therefore \text{س} = ٢$

بالتعويض في (١): $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = -٢٠٠$

٥

(١) (ب) (٢) (جـ) (٣) (أ) (٤) (أ) (٥) (جـ)
(٦) (أ) (٧) (د) (٨) (أ) (٩) (جـ) (١٠) (ب)
(١١) (ب) (١٢) (د) (١٣) (أ) (١٤) (د)

٦

$\text{ص} = \text{أ س}^{٣} + \text{ب س}^{٢} + \text{جـ س} + \text{ء}$

$\text{ص}' = ٣\text{أ س}^{٢} + ٢\text{ب س} + \text{جـ}$

$\text{ص}'' = ٦\text{أ س} + ٢\text{ب}$

$\text{ص}'' = ٢٨$ عند $\text{س} = ١$

$٢٨ = ٦\text{أ} + ٢\text{ب}$ منها $٣\text{أ} + \text{ب} = ١٤$ $\quad (١)$

، $\text{ص}'' = ٣٤$ عند $\text{س} = ٢$

$٣٤ = ١٢\text{أ} + ٢\text{ب}$ منها $٦\text{أ} + \text{ب} = ١٧$ $\quad (٢)$

بحل المعادلتين (١) ، (٢) ينتج أن: $\text{أ} = ١$ ، $\text{ب} = ١١$

$\text{ص}' = ٧٥$ عند $\text{س} = ٢$

$٧٥ = ٣ \times ١ \times ٤ + ٢ \times ١١ \times ٢ + \text{جـ}$

$\therefore \text{جـ} = ١٩$

، $\text{ص} = ٨$ عند $\text{س} = ١$

$٨ = ١ \times ١^{٣} + ١١ \times ١^{٢} + ١٩ \times ١ + \text{ء}$

$\therefore \text{ء} = -٢٣$

س	ص	ص'	ص''
١	٨	٤٤	٢٨
٢	٦٧	٧٥	٣٤

٧

$\because \text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ١٦$ (وبالاشتقاق بالنسبة لـ س)

$\therefore ٢\text{س} + ٢\text{ص} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$

(وبالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة لـ س)

$\therefore ٢ + ٢\text{ص} \times \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} + \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \times ٢ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$

$\therefore ٢ + ٢\text{ص} \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} + ٢\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)^{٢} = ٠$

بالقسمة على ٢: $\therefore \text{ص} \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} + \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)^{٢} + ١ = ٠$

٨

$\because \text{ص}^{٢} + \text{أ س}^{٣} - \text{ب س} = \text{جـ}$

(وبالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ٢\text{ص} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + ٣\text{أ س}^{٢} - \text{ب} = \text{صفر}$

(وبالاشتقاق بالنسبة إلى س مرة أخرى)

$\therefore ٢\text{ص} \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} + ٢\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)^{٢} + ٦\text{أ س} = ٠$

بالقسمة على ٢

$\therefore \text{ص} \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} + \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)^{٢} + ٣\text{أ س} = ٠$

٩

$\text{ص}^{٢} = \text{س}^{٢} - \text{س}^{٣}$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ٢\text{ص} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س} - ٣\text{س}^{٢}$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س مرة أخرى)

$٢\text{ص} \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} + ٢ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢ - ٦\text{س}$

بالقسمة على ٢

$\therefore \text{ص} \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} + \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)^{٢} = ١ - ٣\text{س}$

$\therefore \text{ص} \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} + \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)^{٢} + ٣\text{س} = ١$

١٠

$٤\text{ص}^{٣} = ٣\text{س}^{٢}$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ١٢\text{ص}^{٢} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٦\text{س}$ $\quad \therefore ٢\text{ص}^{٢} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{س}$

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

$\therefore ٤\text{ص} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + ٢\text{ص}^{٢} \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = ١$

$\therefore ٤\text{ص} \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)^{٢} + ٢\text{ص}^{٢} \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = ١$

١١

$\because \text{س}^{٣} + \text{ص}^{٣} = ١$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ٣\text{س}^{٢} + ٣\text{ص}^{٢} \text{ص}' = ٠$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س مرة أخرى)

$\therefore ٦\text{س} + ٣(٢\text{ص ص}' \times \text{ص}' + \text{ص}^{٢} \text{ص}'') = ٠$

بالقسمة على ٣

$\therefore \text{ص}^{٢} \text{ص}'' + ٢\text{ص ص}'^{٢} + ٢\text{س} = ٠$

١٢

$\because \text{س}^{٢} \text{ص}^{٢} = ١$ $\quad \therefore \text{س ص} = ١$

$\therefore \text{س} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + \text{ص} = ٠$ $\quad \therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-\text{ص}}{\text{س}}$

$\therefore \text{س} \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} + \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$

$\therefore \text{س} \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} + ٢ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$

$\therefore \text{س} \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = ٢ \times \frac{\text{ص}}{\text{س}}$ $\quad \therefore \text{س}^{٢} \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = ٢\text{ص}$

حل آخر:

$\because \text{س ص} = ١$ $\quad \therefore \text{ص} = \text{س}^{-١}$

$\therefore \text{ص}' = -\text{س}^{-٢}$ $\quad \therefore \text{ص}'' = ٢\text{س}^{-٣}$

$\therefore \text{س}^{٢} \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = \text{س}^{٢} \times ٢\text{س}^{-٣} = \frac{٢}{\text{س}} = ٢\text{ص}$

١٣

$\because \text{س}^{٢} \text{ص} = ٢\text{س} + ٥$ (بالاشتقاق بالنسبة الى س)

$\therefore \text{س}^{٢} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + ٢\text{س ص} = ٢$

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

$\therefore \text{س}^{٢} \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} + ٢\text{س} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + ٢\text{س} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + ٢\text{ص} = ٠$

$\therefore \text{س}^{٢} \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} + ٤\text{س} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + ٢\text{ص} = ٠$

١٤

$\because \text{ص}^{٢} = \text{س}$ $\quad \therefore ٢\text{ص} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ١$

$\therefore \text{ص} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٢}$

(وبالاشتقاق بالنسبة إلى س مرة أخرى)

$\therefore \text{ص} \times \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} + \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$

وبالضرب × ص

$\therefore \text{ص}^{٢} \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} + \text{ص} \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)^{٢} = ٠$

$\therefore \text{س} \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} + \text{ص} \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)^{٢} = ٠$

١٥

$\because ٢\text{س ص} + ٣ = ٥\text{س}^{٢}$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ٢\left(\text{س} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + \text{ص}\right) = ١٠\text{س}$

(وبالاشتقاق بالنسبة إلى س مرة أخرى)

$\therefore ٢\left[\text{س} \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} + \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right] = ١٠$

$\therefore \text{س} \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} + ٢ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٥$

١٦

$\because \text{ص}^{٢} = ١ - \text{س}^{-٢}$ (وبالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ٢\text{ص} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س}^{-٣}$ $\quad \therefore \text{ص} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{س}^{-٣}$

(وبالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

$\therefore \text{ص} \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} + \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -٣\text{س}^{-٤}$

$\therefore \text{ص} \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} + \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)^{٢} + \frac{٣}{\text{س}^{٤}} = \text{صفر}$

١٧

$٣\text{ص}^{٤} = ٤\text{س}^{٣}$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore ١٢\text{ص}^{٣} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ١٢\text{س}^{٢}$

(بالقسمة على ١٢) $\therefore \text{ص}^{٣} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{س}^{٢}$

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

$\therefore ٣\text{ص}^{٢} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + \text{ص}^{٣} \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = ٢\text{س}$

$\therefore \text{ص}^{٣} \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} + ٣\text{ص}^{٢} \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)^{٢} = ٢\text{س}$

(بالقسمة على ص²)

$\therefore \text{ص} \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} + ٣\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)^{٢} = \frac{٢\text{س}}{\text{ص}^{٢}}$

١٨

$\text{ص} = \text{س}^{-١}$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{س}^{-٢}$ (بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

$\therefore \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = ٢\text{س}^{-٣}$

$\therefore \text{س}^{٢} \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} + ٣\text{س} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + \text{ص}$

$= \text{س}^{٢}(٢\text{س}^{-٣}) + ٣\text{س}(-\text{س}^{-٢}) + \text{س}^{-١}$

$= ٢\text{س}^{-١} - ٣\text{س}^{-١} + \text{س}^{-١} = \text{صفر}$

٤) ص = ...

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{٢(س + ٣) - (٢ س - ١)}{(س + ٣)^٢}$

$= \frac{٧}{(س + ٣)^٢} = ٧ (س + ٣)^{-٢}$

س	ص	ص'	ص''
١	٨	٤٤	٢٨
٢	٦٧	٧٤	٣٤

٧

∵ $س^٢ + ص^٢ = ١٦$ (وبالاشتقاق بالنسبة لـ س)

∴ $٢ س + ٢ ص \frac{دص}{دس} = ٠$

(وبالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة لـ س)

∴ $٢ + ٢ ص \times \frac{د^٢ص}{دس^٢} + ٢ \times \frac{دص}{دس} \times \frac{دص}{دس} = ٠$

∴ $٢ + ٢ ص \frac{د^٢ص}{دس^٢} + ٢ \left(\frac{دص}{دس}\right)^٢ = ٠$

بالقسمة على ٢ ∴ $ص \frac{د^٢ص}{دس^٢} + \left(\frac{دص}{دس}\right)^٢ + ١ = ٠$

٨

∵ $ص^٢ + ٢ س^٢ - ب س = جـ$

19

$(1 + س)$ ص $= س^2$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ $(1 + س) \frac{ءص}{ءس} +$ ص $= 2$ س

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

∴ $(1 + س) \frac{ء^2ص}{ءس^2} + \frac{ءص}{ءس} + \frac{ءص}{ءس} = 2$

∴ $(1 + س) \frac{ء^2ص}{ءس^2} + 2 \frac{ءص}{ءس} = 2$

20

$ص^2 + س^2 ص^2 = 8$

∴ $ص^2 (1 + س^2) = 8$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ 2 ص $\frac{ءص}{ءس} \times (1 + س^2) + ص^2 (2$ س$) =$ صفر

(بالقسمة على 2 ص)

∴ $(1 + س^2) \frac{ءص}{ءس} +$ س ص $=$ صفر

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

∴ $(1 + س^2) \frac{ء^2ص}{ءس^2} + \frac{ءص}{ءس} (2$ س$) +$ س $\frac{ءص}{ءس} +$ ص $= 0$

$(س^2 + 1) \frac{ء^2ص}{ءس^2} + 3$ س $\frac{ءص}{ءس} +$ ص $= 0$

21

∵ $4 س^2 + ص^2 = 25$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ 8 س $+ 2$ ص $\frac{ءص}{ءس} = 0$ (بالقسمة على 2)

∴ 4 س $+$ ص $\frac{ءص}{ءس} = 0$ (1)

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-4 س}{ص}$ (2)

وبالاشتقاق للعلاقة (1) مرة أخرى بالنسبة إلى س

∴ $4 + \left(\frac{ءص}{ءس}\right)^2 +$ ص $\times \frac{ء^2ص}{ءس^2} = 0$ (3)

ثم بعوض من (2) في (3)

∴ $4 + \frac{16 س^2}{ص^2} +$ ص $\times \frac{ء^2ص}{ءس^2} = 0$ (بالضرب × $ص^2$)

∴ $4 ص^2 + 16 س^2 + ص^3 \times \frac{ء^2ص}{ءس^2} = 0$

∴ $4 (ص^2 + 4 س^2) + ص^3 \times \frac{ء^2ص}{ءس^2} = 0$

∴ $4 \times 25 + ص^3 \times \frac{ء^2ص}{ءس^2} = 0$

∴ $ص^3 \times \frac{ء^2ص}{ءس^2} + 100 = 0$

22

س $+$ ص $=$ س ص ∴ ص $=$ س ص $-$ س

∴ س $=$ ص $($س $- 1)$ (1)

∴ ص $= \frac{س}{س - 1}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{(س - 1) - س}{(س - 1)^2} = \frac{-1}{(س - 1)^2}$

$= -(س - 1)^{-2}$

∴ $\frac{ء^2ص}{ءس^2} = 2 (س - 1)^{-3}$

، ∵ من (1) س $- 1 = \frac{س}{ص}$

∴ $\frac{ء^2ص}{ءس^2} = 2 \left(\frac{س}{ص}\right)^{-3} = 2 \left(\frac{ص}{س}\right)^3$

23

ص $= \sqrt{2 س + 5}$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{2}{2\sqrt{2 س + 5}} = (2 س + 5)^{-\frac{1}{2}}$

$\frac{ء^2ص}{ءس^2} = -\frac{1}{2} (2 س + 5)^{-\frac{3}{2}} \times 2$

$= -(2 س + 5)^{-\frac{3}{2}}$

$\frac{ء^3ص}{ءس^3} = \frac{3}{2} (2 س + 5)^{-\frac{5}{2}} \times 2$

$= 3 (2 س + 5)^{-\frac{5}{2}}$

الطرف الأيمن $= (2$ س $+ 5)^{?} \frac{ء^3ص}{ءس^3} + ? \frac{ء^2ص}{ءس^2}$ [illegible]

$= 3 (2$ س $+ 5) \times$ [illegible]

[illegible]

$=$ صفر

حل آخر

∵ ص $= \sqrt{2 س + 5}$ ∴ $ص^2 = 2$ س $+ 5$

∴ 2 ص ص$' = 2$ ∴ ص ص$' = 1$

[illegible]

∴ $(2$ س $+ 5) \frac{ء^3ص}{ءس^3} + 3 \frac{ء^2ص}{ءس^2} = 0$

24

ص $= \frac{س}{\sqrt{س^2 + 1}}$

∴ ص $\sqrt{س^2 + 1} =$ س (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

ص $\times \frac{س}{\sqrt{س^2 + 1}} + \sqrt{س^2 + 1} \times \frac{ءص}{ءس} = 1$

بالضرب × $\sqrt{س^2 + 1}$

س ص $+ (س^2 + 1) \frac{ءص}{ءس} = \sqrt{س^2 + 1}$

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

س $\frac{ءص}{ءس} +$ ص $+ (س^2 + 1) \frac{ء^2ص}{ءس^2} + \frac{ءص}{ءس} (2$ س$)$

$= \frac{س}{\sqrt{س^2 + 1}}$

$(س^2 + 1) \frac{ء^2ص}{ءس^2} + 3$ س $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)$

$+$ ص $= \frac{س}{\sqrt{س^2 + 1}} =$ ص

∴ $(س^2 + 1)$ ص$'' + 3$ س ص$' =$ صفر

[illegible]

32

∵ ص $=$ قا س ∴ $\frac{ءص}{ءس} =$ قا س طا س

∴ $\frac{ء^2ص}{ءس^2} =$ قا س $قا^2$ س $+$ قا س طا س طا س

$= قا^3$ س $+$ قا س $طا^2$ س

$=$ قا س $(قا^2$ س $+ طا^2$ س$)$

∴ ص $\frac{ء^2ص}{ءس^2} + \left(\frac{ءص}{ءس}\right)^2$

$=$ قا س . قا س $(قا^2$ س $+ طا^2$ س$) + قا^2$ س $طا^2$ س

$= قا^2$ س $(قا^2$ س $+ 2 طا^2$ س$)$

$= قا^2$ س $(3 قا^2$ س $- 2) = ص^2 (3 ص^2 - 2)$

33

ص $=$ جا 2 س ∵ $\frac{ءص}{ءس} = 2$ جتا 2 س

، $\frac{ء^2ص}{ءس^2} = -4$ جا 2 س ، $\frac{ء^3ص}{ءس^3} = -8$ جتا 2 س

(1) $4 \left(\frac{ءص}{ءس}\right)^2 + \left(\frac{ء^2ص}{ءس^2}\right)^2$

$= 4 (2$ جتا 2 س$)^2 + (-4$ جا 2 س$)^2$

$= 16 جتا^2 2$ س $+ 16 جا^2 2$ س $= 16 \times 1 = 16$

(2) $\frac{ء^3ص}{ءس^3} + 4 \frac{ءص}{ءس}$

$= -8$ جتا 2 س $+ 4 (2$ جتا 2 س$)$

$= -8$ جتا 2 س $+ 8$ جتا 2 س $=$ صفر

34

ص $=$ جا 3 س $+$ جتا 3 س

$\frac{ءص}{ءس} = 3$ جتا 3 س $- 3$ جا 3 س

$\frac{ء^2ص}{ءس^2} = -9$ جا 3 س $- 9$ جتا 3 س

$\frac{ء^3ص}{ءس^3} = -27$ جتا 3 س $+ 27$ جا 3 س

$\frac{ء^4ص}{ءس^4} = 81$ جا 3 س $+ 81$ جتا 3 س

(1) $\frac{ء^2ص}{ءس^2} + 9$ ص

$= -9$ جا 3 س $- 9$ جتا 3 س

$+ 9 ($جا 3 س $+$ جتا 3 س$) =$ صفر

(2) $\frac{ء^4ص}{ءس^4} = 81$ جا 3 س $+ 81$ جتا 3 س

$= 81 ($جا 3 س $+$ جتا 3 س$) = 81$ ص

28

∵ $\frac{ءص}{ءس} = -$ جا س ، $\frac{ء^2ص}{ءس^2} = -$ جتا س

∴ الطرف الأيمن

$= (-$ جا س$)^2 -$ جتا س $(-$ جتا س$)$

$= جا^2$ س $+ جتا^2$ س $= 1 =$ الطرف الأيسر

29

∵ ص $= 2$ جتا $(3$ س $+ 1)$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = -6$ جا $(3$ س $+ 1)$

∴ $\frac{ء^2ص}{ءس^2} = -18$ جتا $(3$ س $+ 1)$

$= -9 \times 2$ جتا $(3$ س $+ 1) = -9$ ص

∴ $\frac{ء^2ص}{ءس^2} + 9$ ص $= 0$

30

ص $=$ طا س

$\frac{ءص}{ءس} = قا^2$ س

$\frac{ء^2ص}{ءس^2} = 2$ قا س . قا س طا س $= 2 قا^2$ س طا س (1)

∵ 2 ص $(1 + ص^2) = 2$ طا س $\times (1 + طا^2$ س$)$

$= 2$ طا س $\times قا^2$ س (2)

من (1) ، (2) ينتج أن

∴ $\frac{ء^2ص}{ءس^2} = 2$ ص $(1 + ص^2)$

31

ص س $= 10 -$ جتا س (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ص $+$ س $\frac{ءص}{ءس} =$ جا س

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

∴ $\frac{ءص}{ءس} +$ س $\frac{ء^2ص}{ءس^2} + \frac{ءص}{ءس} =$ جتا س

∴ س $\frac{ء^2ص}{ءس^2} + 2 \frac{ءص}{ءس} =$ جتا س

35

ص $=$ س جا س

$\frac{ءص}{ءس} =$ س جتا س $+$ جا س

$\frac{ء^2ص}{ءس^2} = -$ س جا س $+$ جتا س $+$ جتا س

$= -$ س جا س $+ 2$ جتا س

$\frac{ء^3ص}{ءس^3} = -$ س جتا س $-$ جا س $- 2$ جا س

$= -$ س جتا س $- 3$ جا س

(1) $\frac{ء^2ص}{ءس^2} +$ ص

$= -$ س جا س $+ 2$ جتا س $+$ س جا س $= 2$ جتا س

(2) س $\frac{ء^2ص}{ءس^2} - 2 \frac{ءص}{ءس} +$ س ص

$=$ س $(-$ س جا س $+ 2$ جتا س$)$

$- 2 ($س جتا س $+$ جا س$) +$ س $($س جا س$)$

$= -س^2$ جا س $+ 2$ س جتا س $- 2$ س جتا س $- 2$ جا س $+ س^2$ جا س

[illegible]

(3) $د''(-$ س$) = 2$ جتا $(-$ س$) - (-$ س$)$ جا $(-$ س$)$

$= 2$ جتا س $-$ س جا س $= د''($س$)$

∴ $د''($س$)$ دالة زوجية

36

ص $= \frac{ع - 1}{ع}$ ، ع $= س^2 - 1$

∴ ص $= \frac{س^2 - 2}{س^2 - 1}$

[illegible]

37

[illegible]

38

[illegible]

٤٦

ص = ظا ع

∴ $\frac{د ص}{د ع}$ = قا^٢ ع

٤٧

① (جـ)	② (جـ)	③ (جـ)	④ (د)
⑤ (جـ)	⑥ (جـ)	⑦ (أ)	⑧ (جـ)
⑨ (د)	⑩ (ب)	⑪ (جـ)	⑫ (ب)
⑬ (ب)	⑭ (د)	⑮ (ب)	⑯ (د)
⑰ (جـ)	⑱ (ب)	⑲ (ب)	⑳ (ب)
㉑ (أ)	㉒ (ب)	㉓ (د)	㉔ (جـ)
㉕ (د)	㉖ (د)	㉗ (أ)	㉘ (أ)
㉙ (جـ)	㉚ (ب)	㉛ (د)	㉜ (جـ)
㉝ (ب)	㉞ (ب)	㉟ (أ)	㊱ (أ)
㊲ (ب)	㊳ (جـ)	㊴ (د)	㊵ (جـ)
㊶ (أ)	㊷ (ب)	㊸ (ب)	

٤٨

∵ س ص = جا س جتا س

∴ س ص = $\frac{1}{2}$ جا ٢ س

وبالاشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

∴ ١ × ص + $\frac{د ص}{د س}$ × س = جتا ٢ س

وبالاشتقاق مرة ثانية بالنسبة إلى س

∴ $\frac{د ص}{د س}$ + $\frac{د^2 ص}{د س^2}$ × س + ١ × $\frac{د ص}{د س}$ = −٢ جا ٢ س

∴ س $\frac{د^2 ص}{د س^2}$ + ٢ $\frac{د ص}{د س}$ + ٢ جا ٢ س = ٠

∵ ٢ جا ٢ س = ٤ س ص

∴ س $\frac{د^2 ص}{د س^2}$ + ٢ $\frac{د ص}{د س}$ + ٤ س ص = ٠

٤٩

∵ جا س = س ص (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ جتا س = س صَ + ص (١)

∴ صَ = $\frac{جتا س - ص}{س}$

وبالاشتقاق للعلاقة (١) مرة أخرى بالنسبة إلى س

∴ − جا س = س صً + صَ + صَ

∴ − جا س = س صً + ٢ صَ

∴ − س ص = س صً + ٢ × $\left(\frac{جتا س - ص}{س}\right)$

∴ − س^٢ ص = س^٢ صً + ٢ جتا س − ٢ ص

∴ س^٢ (ص + صً) + ٢ جتا س = ٢ ص

٥٠

ص = س ظا س (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\frac{د ص}{د س}$ = س قا^٢ س + ظا س

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

$\frac{د^2 ص}{د س^2}$ = س × ٢ قا س . قا س ظا س + قا^٢ س + قا^٢ س

= ٢ س قا^٢ س ظا س + ٢ قا^٢ س

= ٢ قا^٢ س (١ + س ظا س)

= ٢ (١ + ص) قا^٢ س

٥١

س ص = جا أ س (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

س $\frac{د ص}{د س}$ + ص = أ جتا أ س

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س مرة أخرى)

س $\frac{د^2 ص}{د س^2}$ + $\frac{د ص}{د س}$ + $\frac{د ص}{د س}$ = − أ^٢ جا أ س

س $\frac{د^2 ص}{د س^2}$ + ٢ $\left(\frac{د ص}{د س}\right)$ = − أ^٢ × س ص

∴ س $\frac{د^2 ص}{د س^2}$ + ٢ $\left(\frac{د ص}{د س}\right)$ + أ^٢ س ص = ٠

٥٢

ص = أ جا س^٢ + ب جتا س^٢ (١)

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\frac{د ص}{د س}$ = −٢ أ س جا س^٢ + ٢ ب س جتا س^٢

= ٢ س (− أ جا س^٢ + ب جتا س^٢) (٢)

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

$\frac{د^2 ص}{د س^2}$ = ٢ (− أ جا س^٢ + ب جتا س^٢)

+ ٢ س (− ٢ أ س جتا س^٢ − ٢ ب س جا س^٢)

= ٢ (− أ جا س^٢ + ب جتا س^٢)

− ٤ س^٢ (أ جا س^٢ + ب جتا س^٢)

بالتعويض في (١) ، (٢) ينتج أن :

$\frac{د^2 ص}{د س^2}$ = $\frac{1}{س}$ $\frac{د ص}{د س}$ − ٤ س^٢ ص (بالضرب × س)

س $\frac{د^2 ص}{د س^2}$ − $\frac{د ص}{د س}$ + ٤ س^٣ ص = ٠

٥٣

∵ س ص = أ ∴ ص = أ س^{-١}

∴ $\frac{د ص}{د س}$ = − أ س^{-٢} ، $\frac{د^2 ص}{د س^2}$ = ٢ أ س^{-٣}

، س = أ ص^{-١}

∴ $\frac{د س}{د ص}$ = − أ ص^{-٢} ، $\frac{د^2 س}{د ص^2}$ = ٢ أ ص^{-٣}

∴ $\frac{د^2 ص}{د س^2}$ × $\frac{د^2 س}{د ص^2}$ = ٢ أ س^{-٣} × ٢ أ ص^{-٣}

= ٤ أ^٢ س^{-٣} ص^{-٣}

= ٤ أ^٢ (أ^{-٣}) = $\frac{٤}{أ}$

، $\frac{د ص}{د س}$ × $\frac{د س}{د ص}$ = ١

∵ $\frac{د^2 ص}{د س^2}$ × $\frac{د^2 س}{د ص^2}$ > $\frac{د ص}{د س}$ × $\frac{د س}{د ص}$

∴ $\frac{٤}{أ}$ > ١ ∴ ٤ > أ

∴ أ ∈]٠ ، ٤[

٥٤

ص = أ س^٣ + ب س^٢

$\frac{د ص}{د س}$ = ٣ أ س^٢ + ٢ ب س

$\frac{د^2 ص}{د س^2}$ = ٦ أ س + ٢ ب $\frac{د^3 ص}{د س^3}$ = ٦ أ

∴ ٦ أ = ١٢ ∴ أ = ٢

، (٦ أ س + ٢ ب)$_{س = ١}$ = ٦

∴ ٦ أ + ٢ ب = ٦ ∴ ب = −٣

٥٥

بفرض أن : د (س) = س^٣ + أ س^٢ + ب س + جـ

∴ دَ (س) = ٣ س^٢ + ٢ أ س + ب

∴ دً (س) = ٦ س + ٢ أ

∴ س^٣ + (أ + ٣) س^٢ + (٢ أ + ب + ٦) س

+ ٢ أ + ب + جـ

= س^٣ + ٧ س^٢ + ٩ س − ٣

∴ أ + ٣ = ٧ ∴ أ = ٤

٢ أ + ب + ٦ = ٩ ∴ ب = −٥

٢ أ + ب + جـ = −٣ ∴ جـ = −٥

∴ د (س) = س^٣ + ٤ س^٢ − ٥ س − ٥

٥٦

ص = أ س^ن + ب س^{-ن + ١}

$\frac{د ص}{د س}$ = ن أ س^{ن − ١} + ب (− ن + ١) س^{-ن}

$\frac{د^2 ص}{د س^2}$ = ن (ن − ١) أ س^{ن − ٢}

+ ب (− ن + ١)(− ن) س^{-ن − ١}

(بالضرب × س^٢)

س^٢ $\frac{د^2 ص}{د س^2}$ = ن (ن − ١) أ س^ن

+ ب (ن − ١)(ن) س^{-ن + ١}

= ن (ن − ١) [أ س^ن + ب س^{-ن + ١}]

= ن (ن − ١) ص

٥٧

ص = أ جا س + ب جتا س

$\frac{د ص}{د س}$ = أ جتا س − ب جا س

$\frac{د^2 ص}{د س^2}$ = − أ جا س − ب جتا س

$\frac{د^3 ص}{د س^3}$ = − أ جتا س + ب جا س

$\frac{د^4 ص}{د س^4}$ = أ جا س + ب جتا س

∴ $\frac{د ص}{د س}$ + $\frac{د^3 ص}{د س^3}$

= (أ جتا س − ب جا س) + (− أ جتا س + ب جا س)

= صفر (١)

$\frac{د^2 ص}{د س^2}$ + $\frac{د^4 ص}{د س^4}$

= (− أ جا س − ب جتا س) + (أ جا س + ب جتا س)

= صفر (٢)

من (١) ، (٢)

∴ $\frac{د ص}{د س}$ + $\frac{د^3 ص}{د س^3}$ = $\frac{د^2 ص}{د س^2}$ + $\frac{د^4 ص}{د س^4}$

٥٨

ص = د (ع) ، ع = ر (س)

$\frac{د ص}{د ع}$ = دَ (ع) ، $\frac{د ع}{د س}$ = رَ (س)

$\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{د ص}{د ع}$. $\frac{د ع}{د س}$

$\frac{د ص}{د س}$ = دَ (ع) . رَ (س)

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\frac{د^2 ص}{د س^2}$ = دَ (ع) . رً (س) + رَ (س) دً (ع) × $\frac{د ع}{د س}$

= دَ (ع) . رً (س) + رَ (س) دً (ع) × رَ (س)

= دً (ع) [رَ (س)]^٢ + رً (س) . دَ (ع)

59

$ص = \frac{س - 1}{س + 1}$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{(س + 1) - (س - 1)}{(س + 1)^2} = \frac{2}{(س + 1)^2} = 2(س + 1)^{-2}$

$\frac{ء^2ص}{ءس^2} = -2 \times 2 (س + 1)^{-3} = \frac{-2\underline{|2}}{(س + 1)^3}$

$\frac{ء^3ص}{ءس^3} = 2 \times 2 \times 3 (س + 1)^{-4} = \frac{2\underline{|3}}{(س + 1)^4}$

$\frac{ء^4ص}{ءس^4} = -2 \times 2 \times 3 \times 4 (س + 1)^{-5} = \frac{-2\underline{|4}}{(س + 1)^5}$

$\therefore \frac{ء^نص}{ءس^ن} = \frac{(-1)^{ن-1} \times 2\underline{|ن}}{(س + 1)^{ن+1}}$

60

$ص = جتا\, أس$

$ص' = -أ\, جا\, أس = أ\, جتا\left(أس + \frac{\pi}{2}\right)$

$، ص'' = -أ^2\, جتا\, أس = أ^2\, جتا(أس + \pi)$

$، ص''' = أ^3\, جا\, أس = أ^3\, جتا\left(أس + \frac{3\pi}{2}\right)$

$، ص^{(4)} = أ^4\, جتا\, أس = أ^4\, جتا(أس + 2\pi)$

$\therefore ص^{(ن)} = أ^ن\, جتا\left(أس + \frac{ن\pi}{2}\right)$

$\therefore ص^{(15)} = أ^{15}\, جتا\left(أس + \frac{15\pi}{2}\right)$

$= أ^{15}\, جتا\left(أس + \frac{3\pi}{2}\right) = أ^{15}\, جا\, أس$

$ص^{(2020)} = أ^{2020}\, جتا\left(أس + \frac{2020\pi}{2}\right)$

$= أ^{2020}\, جتا(أس) = أ^{2020}\, ص$

61

$ص = جا\, أس$

$ص' = أ\, جتا\, أس = أ\, جا\left(أس + \frac{\pi}{2}\right)$

$، ص'' = -أ^2\, جا\, أس = أ^2\, جا(أس + \pi)$

$، ص''' = -أ^3\, جتا\, أس = أ^3\, جا\left(أس + \frac{3\pi}{2}\right)$

$، ص^{(4)} = أ^4\, جا\, أس = أ^4\, جا(أس + 2\pi)$

$\therefore ص^{(ن)} = أ^ن\, جا\left(أس + \frac{ن\pi}{2}\right)$

$\therefore ص^{(25)} = أ^{25}\, جا\left(أس + \frac{25\pi}{2}\right)$

$= أ^{25}\, جا\left(أس + \frac{\pi}{2}\right) = أ^{25}\, جتا\, أس$

$، ص^{(2016)} = أ^{2016}\, جا\left(أس + \frac{2016\pi}{2}\right)$

$= أ^{2016}\, جا(أس) = أ^{2016}\, ص$

62

$جا ص + جتا 2س = 0$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$جتا ص \frac{ءص}{ءس} - 2\, جا 2س = 0$

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

$جتا ص \frac{ء^2ص}{ءس^2} + \frac{ءص}{ءس} \times -جا ص \times \frac{ءص}{ءس} - 4\, جتا 2س = 0$

(بالقسمة على جتا ص)

$\therefore \frac{ء^2ص}{ءس^2} - \left(\frac{ءص}{ءس}\right)^2 ظا ص = 4\, جتا 2س\, قا ص$

63

$جا 2س - جتا 2ص = 0$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$2\, جتا 2س + 2\, جا 2ص \frac{ءص}{ءس} = 0$

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

$-4\, جا 2س + 9\, جتا 2ص \left(\frac{ءص}{ءس}\right)^2 + \frac{ء^2ص}{ءس^2}(2\, جا 2ص) = 0$

(بالقسمة على جتا 2ص)

$\frac{-4\, جا 2س}{جتا 2ص} + 9\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^2 + \frac{ء^2ص}{ءس^2}(2\, ظا 2ص) = 0$

(ولكن جا 2س = جتا 2ص)

$\therefore 2\, ظا 2ص \frac{ء^2ص}{ءس^2} + 9\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^2 - 4 = 0$

64

$ص = ظا^2 س$

$\frac{ءص}{ءس} = 2\, ظا س\, قا^2 س$

$= 2\, ظا س (1 + ظا^2 س)$

$= 2\, ظا س + 2\, ظا^3 س$

$\frac{ء^2ص}{ءس^2} = 2\, قا^2 س + 6\, ظا^2 س\, قا^2 س$

$= 2(1 + ص) + 6ص(1 + ص)$

$= 2(1 + ص)(1 + 3ص)$

$\therefore \frac{1}{2}\frac{ء^2ص}{ءس^2} = (1 + ص)(1 + 3ص)$

65

① (أ)   ② (ب)   ③ (د)   ④ (أ)
⑤ (ج)   ⑥ (د)   ⑦ (ج)

إرشادات لحل رقم 65

① $\because ص = 1 + \frac{س}{\underline{|1}} + \frac{س^2}{\underline{|2}} + \frac{س^3}{\underline{|3}} + \dots$ إلى ∞

$\therefore ص' = صفر + \frac{1}{\underline{|1}} + \frac{2س}{\underline{|2}} + \frac{3س^2}{\underline{|3}} + \dots$ إلى ∞

$= 1 + \frac{س}{\underline{|1}} + \frac{س^2}{\underline{|2}} + \dots$ إلى ∞

$\therefore ص' = ص \qquad \therefore ص'' = ص' = ص$

$\therefore 5ص'' - 2ص' - 2ص$

$= 5ص - 2ص - 2ص = صفر$

② $\because د(س + هـ) - د(س) = 5س^2 هـ + هـ^2$

$= هـ(5س^2 + هـ)$

$\therefore \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ} = 5س^2 + هـ$

$\therefore \lim_{هـ \to 0} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$

$= \lim_{هـ \to 0} (5س^2 + هـ)$

$\therefore د'(س) = 5س^2 \qquad \therefore د''(س) = 10س$

$\therefore د'''(س) = 10 \qquad \therefore \frac{ء^3ص}{ءس^3} = 10$

③ $\because (د \circ ر)(س) = د(ر(س)) = [ر(س)]^2$

$\therefore (د \circ ر)'(س) = 2\, ر(س) \times ر'(س)$

$\therefore (د \circ ر)''(س) = 2\, ر(س) \times ر''(س) + 2[ر'(س)]^2$

$\therefore (د \circ ر)''(1) = 2\, ر(1) \times ر''(1) + 2[ر'(1)]^2$

$= 2 \times 3 \times 5 + 2 \times (-2)^2 = 38$

④ $\because \lim_{هـ \to 0} \frac{د(1) - د(1 + هـ)}{2هـ} = 21$

$\therefore -\frac{1}{2} \lim_{هـ \to 0} \frac{د(1 + هـ) - د(1)}{هـ} = 21$

$\therefore -\frac{1}{2} \times د'(1) = 21$

$\therefore د'(1) = -42 \quad ، \because د(س) = 2س^4 - أس^3$

$\therefore د'(س) = 8س^3 - 3أس^2$

$، د''(س) = 24س^2 - 6أس$

$\therefore 24 \times 1 - 6أ \times 1 = -42 \qquad \therefore أ = 11$

⑤ $\because \sqrt{ص + س} + \sqrt{ص - س} = ق$

$\therefore \frac{ص' + 1}{2\sqrt{ص + س}} + \frac{ص' - 1}{2\sqrt{ص - س}} = صفر$

بالضرب في $(2\sqrt{ص + س}\sqrt{ص - س})$

$\therefore (ص' + 1)\sqrt{ص - س}$

$+ (ص' - 1)\sqrt{ص + س} = صفر$

$\therefore ص'(\sqrt{ص + س} + \sqrt{ص - س})$

$= \sqrt{ص + س} - \sqrt{ص - س}$

$\therefore ص' = \frac{\sqrt{ص + س} - \sqrt{ص - س}}{\sqrt{ص + س} + \sqrt{ص - س}}$

بالضرب في مرافق البسط

$\therefore ص' = \frac{(\sqrt{ص + س} - \sqrt{ص - س})(\sqrt{ص + س} + \sqrt{ص - س})}{(\sqrt{ص + س} + \sqrt{ص - س})(\sqrt{ص + س} + \sqrt{ص - س})}$

$\therefore ص' = \frac{(ص + س) - (ص - س)}{(\sqrt{ص + س} + \sqrt{ص - س})^2}$

$= \frac{2س}{ق^2} = \frac{2}{ق^2} س$

$\therefore ص'' = \frac{2}{ق^2}$

⑥ $\because \frac{ء^نص}{ءس^ن} = 2^ن \times ص \quad ، \quad ص = جا 2س$

∴ ن تقبل القسمة على 4

⑦ $\because ص = أس^ن - بس^{ن+1} + 5$

$\therefore \frac{ء^نص}{ءس^ن} = أ\underline{|ن} - ب\underline{|ن + 1}\, س$ وهي دالة خطية ميلها سالب وتقطع جزءًا موجبًا من محور الصادات

∴ يمثلها الشكل رقم (ج)

66

$ص = \left(س + \sqrt{1 + س^2}\right)^5$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\frac{ءص}{ءس} = 5\left(س + \sqrt{1 + س^2}\right)^4 \left(1 + \frac{س}{\sqrt{1 + س^2}}\right)$

$= 5\left(س + \sqrt{1 + س^2}\right)^4 \left(\frac{\sqrt{1 + س^2} + س}{\sqrt{1 + س^2}}\right)$

$= \frac{5\left(س + \sqrt{1 + س^2}\right)^5}{\sqrt{1 + س^2}} = \frac{5ص}{\sqrt{1 + س^2}}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{5ص}{\sqrt{1 + س^2}} \qquad (1)$

$\therefore \sqrt{1 + س^2}\, \frac{ءص}{ءس} = 5ص$

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

$\therefore \sqrt{1 + س^2}\, \frac{ء^2ص}{ءس^2} + \frac{س}{\sqrt{1 + س^2}} \frac{ءص}{ءس} = 5 \frac{ءص}{ءس}$

ومن (1) : $\sqrt{1 + س^2}\, \frac{ء^2ص}{ءس^2} + \frac{س}{\sqrt{1 + س^2}} \frac{ءص}{ءس}$

$= 5 \times \frac{5ص}{\sqrt{1 + س^2}}$

(بالضرب × $\sqrt{1 + س^2}$)

$(1 + س^2) \frac{ء^2ص}{ءس^2} + س \frac{ءص}{ءس} - 25ص = صفر$

67

$س = جا ص$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$1 = جتا ص \frac{ءص}{ءس}$

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

$صفر = -جا ص \left(\frac{ءص}{ءس}\right)^2 + جتا ص \frac{ء^2ص}{ءس^2}$

$\therefore \frac{ء^2ص}{ءس^2} = جا ص \left(\frac{1}{جتا ص}\right)^2 \times \frac{1}{جتا ص} = \frac{جا ص}{جتا^3 ص}$

(ولكن $جتا^2 ص + جا^2 ص = 1$)

$\therefore جتا^2 ص = 1 - س^2 \qquad \therefore جتا ص = \sqrt{1 - س^2}$

$\therefore \frac{ء^2ص}{ءس^2} = \frac{جا ص}{جتا^3 ص} = \frac{س}{(1 - س^2)^{\frac{3}{2}}}$

68

$ص = \frac{أس + ب}{جـس + ء}$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{(جـس + ء)(أ) - (أس + ب)(جـ)}{(جـس + ء)^2}$

$= \frac{أء - بجـ}{(جـس + ء)^2}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = (أء - بجـ)(جـس + ء)^{-2}$

(بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س)

$\frac{ء^2ص}{ءس^2} = -2جـ(أء - بجـ)(جـس + ء)^{-3}$

$\frac{ء^3ص}{ءس^3} = 6جـ^2(أء - بجـ)(جـس + ء)^{-4}$

الطرف الأيمن $= 2\left(\frac{ءص}{ءس}\right)\left(\frac{ء^3ص}{ءس^3}\right)$

$= 2(أء - بجـ)(جـس + ء)^{-2}$

$\times 6جـ^2(أء - بجـ)(جـس + ء)^{-4}$

$= 12جـ^2(أء - بجـ)^2(جـس + ء)^{-6}$

الطرف الأيسر $= 3\left(\frac{ء^2ص}{ءس^2}\right)^2$

$= 3\left(-2جـ(أء - بجـ)(جـس + ء)^{-3}\right)^2$

$= 12جـ^2(أء - بجـ)^2(جـس + ء)^{-6}$

∴ الطرفان متساويان.

إجابات تمارين 4

1

نقطة التقاطع مع محور السينات : نضع ص = 0

$\therefore س^2 - 2س - 8 = 0$

$(س - 4)(س + 2) = 0$

$\therefore س = 4$ ومنها $ص = 0 \qquad \therefore$ النقطة $(4 ، 0)$

أ، $س = -2$ ومنها $ص = 0 \qquad \therefore$ النقطة $(-2 ، 0)$

$، \because 2س + 2ص \frac{ءص}{ءس} - 2 + 4 \frac{ءص}{ءس} = 0$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{-2س + 2}{2ص + 4} = \frac{-س + 1}{ص + 2}$

∴ ميل المماس هو :

$\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(4 ، 0)} = \frac{-3}{2} \quad ، \quad \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(-2 ، 0)} = \frac{3}{2}$

2

$\because س^2 + 3س ص + ص^2 = 5$

$\therefore 2س + 3ص + 3س \frac{ءص}{ءس} + 2ص \frac{ءص}{ءس} = 0$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{-2س - 3ص}{3س + 2ص}$

$\therefore \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(1 ، 1)} = -1 \qquad \therefore ظا هـ = -1$

$\therefore هـ = 135^\circ$

3

$ص^3 = س^2 \qquad \therefore ص = س^{\frac{2}{3}}$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{2}{3} س^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{س}}$

ميل المماس عند $(س = 8) = \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س = 8} = \frac{1}{3}$

$\therefore ظا \theta = \frac{1}{3} \qquad \therefore \theta = 18^\circ 26'$

4

$\because 3ص^2 - 6ص + س^2 = 0$

$\therefore 6ص \frac{ءص}{ءس} - 6 \frac{ءص}{ءس} + 2س = 0$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{-2س}{6ص - 6} = \frac{-س}{3ص - 3}$

① نجعل $\frac{ءص}{ءس} = صفر \qquad \therefore \frac{-س}{3ص - 3} = 0$

∴ س = 0 بالتعويض في معادلة المنحنى

$\therefore 3ص^2 - 6ص = 0$

$\therefore 3ص(ص - 2) = 0 \qquad ص = 0$ أ، $ص = 2$

∴ النقط هي $(0 ، 0)$ أ، $(0 ، 2)$

② نجعل $\frac{ءص}{ءس}$ غير معرفة $\qquad \therefore 3ص - 3 = 0$

∴ ص = 1 بالتعويض في معادلة المنحنى

$3 - 6 + س^2 = 0$

$س^2 = 3 \Leftarrow س = \pm\sqrt{3}$

النقط : $(\sqrt{3} ، 1) ، (-\sqrt{3} ، 1)$

③ نجعل $\frac{ءص}{ءس} = ظا 45^\circ = 1 \qquad \therefore \frac{-س}{3ص - 3} = 1$

$3ص - 3 = -س$ بالتعويض من معادلة المنحنى

$3ص^2 - 6ص + (-3ص + 3)^2 = 0$

$3ص^2 - 6ص + (9ص^2 - 18ص + 9) = 0$

$12ص^2 - 24ص + 9 = 0$

$4ص^2 - 8ص + 3 = 0$

$(2ص - 1)(2ص - 3) = 0$

$\therefore ص = \frac{1}{2}$ ومنها $س = \frac{3}{2}$ النقطة $\left(\frac{3}{2} ، \frac{1}{2}\right)$

أ، $ص = \frac{3}{2}$ ومنها $س = \frac{-3}{2}$ النقطة $\left(\frac{-3}{2} ، \frac{3}{2}\right)$

5

$2س + س \frac{ءص}{ءس} + ص + 2ص \frac{ءص}{ءس} = 0$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{-2س - ص}{س + 2ص}$

، ∵ المماس // محور الصادات

$\therefore س + 2ص = 0 \qquad \therefore س = -2ص \quad (1)$

وبالتعويض في معادلة المنحنى

$\therefore 4ص^2 - 2ص^2 + ص^2 = 3$

$\therefore ص^2 = 1 \qquad \therefore ص = \pm 1$

ومن (1) : $\therefore س = \mp 2$

∴ النقط هي : $(2 ، -1) ، (-2 ، 1)$

٦

∴ س^٢ + ص^٢ = ٨ [illegible]

∴ ٢ س + ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ [illegible]

ميل المستقيم المعطى [illegible]

ميل العمودى عليه = ١

∴ ص = س

∴ س^٢ + س^٢ = ٨ ∴ ٢ س^٢ = ٨

∴ س = ± ٢

∴ النقط هى (٢ ، ٢) ، (-٢ ، -٢)

٧

∵ $\sqrt{س}$ + $\sqrt{ص}$ = ٦ (١)

∴ $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$ + $\frac{١}{٢\sqrt{ص}}$ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $-\frac{\sqrt{ص}}{\sqrt{س}}$ ∵ ميل المستقيم المعطى = $\frac{١}{٢}$

∴ ميل العمودى عليه = -٢

∴ $-\frac{\sqrt{ص}}{\sqrt{س}}$ = -٢ ∴ $\sqrt{ص}$ = ٢ $\sqrt{س}$ (٢)

بالتعويض فى (١) ∴ $\sqrt{س}$ + ٢ $\sqrt{س}$ = ٦

∴ ٣ $\sqrt{س}$ = ٦ ∴ $\sqrt{س}$ = ٢

∴ س = ٤ ∴ $\sqrt{ص}$ = ٤

∴ ص = ١٦ ∴ النقطة (٤ ، ١٦)

٨

∵ ص^٢ - س^٢ = ٧ (١)

∴ ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ - ٢ س = ٠ ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{س}{ص}$

∵ جا هـ = $\frac{٤}{٥}$

∴ الميل = ظا هـ = $\frac{٤}{٣}$

∴ $\frac{س}{ص}$ = $\frac{٤}{٣}$

س = $\frac{٤}{٣}$ ص (٢)

من (٢) فى (١) ص^٢ - ($\frac{٤}{٣}$ ص)^٢ = ٧

∴ -$\frac{٧}{٩}$ ص^٢ = ٧ ∴ ص^٢ = [illegible] ∴ ص = [illegible]

ص = ٣ ومنها س = ٤ ∴ النقطة (٤ ، ٣)

ص = -٣ ومنها س = -٤ ∴ النقطة (-٤ ، -٣)

٩

ص = ظا س ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = قا^٢ س

(١) ميل المستقيم = ٢ ∴ قا^٢ س = ٢

∴ قا س = ± $\sqrt{٢}$ ∴ جتا س = ± $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

∴ جتا س = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ومنها س = $\frac{\pi}{٤}$

∴ ص = ١ أ، جتا س = -$\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ومنها

س = $\frac{٣\pi}{٤}$ ∴ ص = -١

∴ النقط ($\frac{\pi}{٤}$ ، ١) ، ($\frac{٣\pi}{٤}$ ، -١)

(٢) ميل المستقيم = $\frac{٤}{٣}$ ∴ قا^٢ س = ٤

قا س = ± ٢ ∴ جتا س = ± $\frac{١}{٢}$

∴ جتا س = $\frac{١}{٢}$ ومنها س = $\frac{\pi}{٣}$

∴ ص = $\sqrt{٣}$

أ، جتا س = -$\frac{١}{٢}$ ومنها س = $\frac{٢\pi}{٣}$

∴ ص = -$\sqrt{٣}$

النقط ($\frac{\pi}{٣}$ ، $\sqrt{٣}$) ، ($\frac{٢\pi}{٣}$ ، -$\sqrt{٣}$)

١٠

ص = - ظا س $\frac{ءص}{ءس}$ = قا^٢ س

ميل المستقيم = $\frac{-(٨)}{٢}$ = ٤

بوضع $\frac{ءص}{ءس}$ = ٤ ∴ قا^٢ س = ٤

∴ قا س = ± ٢ ∴ جا س = ± $\frac{١}{٢}$

∴ س = $\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{٥\pi}{٦}$ ، $\frac{٧\pi}{٦}$ ، $\frac{١١\pi}{٦}$

توجد قيمة ص لكل قيمة لـ س ∴ النقط هى

($\frac{\pi}{٦}$ ، -$\sqrt{٣}$) ، ($\frac{٥\pi}{٦}$ ، $\sqrt{٣}$) ، ($\frac{٧\pi}{٦}$ ، -$\sqrt{٣}$) ، ($\frac{١١\pi}{٦}$ ، $\sqrt{٣}$)

١١

ص = جا س جتا س ∴ ص = $\frac{١}{٢}$ جا ٢ س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = جتا ٢ س ، ميل المستقيم المعطى = ١

∴ ميل العمودى عليه = -١

∴ ميل المماس = -١ ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = -١

∴ جتا ٢ س = -١

∴ ٢ س = π ومنها س = $\frac{\pi}{٢}$ ∴ ص = ٠

∴ النقطة هى ($\frac{\pi}{٢}$ ، ٠)

١٢

∵ ص = $\frac{٢ س - ١}{٢ س - ٢}$

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{(٢ س - ٢)(٢) - (٢ س - ١)(٢)}{(٢ س - ٢)^٢}$

= $\frac{-٢}{(٢ س - ٢)^٢}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(١ ، ١)}$ = -١ ∴ ظا هـ = -١

∴ هـ = ١٣٥°

∵ ميل المستقيم المعطى = $\frac{١}{٤}$

∴ $\frac{-٢}{(٢ س - ٢)^٢}$ = $\frac{-٢}{٤}$ ∴ (٢ س - ٢)^٢ = ٤

∴ ٢ س - ٢ = ٢

∴ ٢ س - ٢ = ٢

ومنها س = ٢ ، ص = $\frac{٣}{٢}$

أو ٢ س - ٢ = -٢

ومنها س = ٠ ، ص = $\frac{١}{٢}$

∴ النقط (٢ ، $\frac{٣}{٢}$) ، (٠ ، $\frac{١}{٢}$)

١٣

(١) س^٢ - ٢ س ص - ص^٢ + ٣ = ٠

(بالاشتقاق بالنسبة لـ س)

∴ ٢ س - ٢ ص - ٢ س $\frac{ءص}{ءس}$ - ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

[illegible]

∴ معادلة المماس هى [illegible]

أى أن ١١ س + ٥ ص [illegible] = ٠

(٢) ∵ ص^٣ + س ص^٢ + ص^٢ = [illegible]

(بالاشتقاق بالنسبة فى س)

∴ ٣ ص^٢ $\frac{ءص}{ءس}$ + [illegible]

[illegible]

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(١ ، ١)}$ = ٢

∴ معادلة المماس هى ص - ١ = ٢ (س - ١)

أى أن ص = ٢ س - ١

(٣) ∵ س^٢ + ٢ س^{$\frac{٣}{٢}$} ص^{$\frac{١}{٢}$} + ص^٢ - ٢١ = ٠

(بالاشتقاق بالنسبة فى س)

∴ ٢ س + ٢ س^{$\frac{٣}{٢}$} × $\frac{١}{٢}$ ص^{-$\frac{١}{٢}$} $\frac{ءص}{ءس}$ + ٢ ص^{$\frac{١}{٢}$}

× $\frac{٣}{٢}$ س^{$\frac{١}{٢}$} + ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

∴ ٢ س + س^{$\frac{٣}{٢}$} ص^{-$\frac{١}{٢}$} $\frac{ءص}{ءس}$ + ٣ ص^{$\frac{١}{٢}$} س^{$\frac{١}{٢}$}

+ ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{-٢ س - ٣ ص^{\frac{١}{٢}} س^{\frac{١}{٢}}}{٢ ص + س^{\frac{٣}{٢}} ص^{-\frac{١}{٢}}}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(١ ، ٤)}$ = $-\frac{٨}{١٧}$

∴ معادلة المماس هى ص - ٤ = $-\frac{٨}{١٧}$ (س - ١)

أى أن ٨ س + ١٧ ص - ٧٦ = ٠

(٤) ∵ ص = ظا س + جا ٢ س

(بالاشتقاق بالنسبة لـ س)

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = قا^٢ س + ٢ جتا ٢ س

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س = \frac{\pi}{٤}}$ = ٢

، عند س = $\frac{\pi}{٤}$ فإن ص = ٢

∴ النقطة ($\frac{\pi}{٤}$ ، ٢)

∴ معادلة المماس هى (ص - ٢) = ٢ (س - $\frac{\pi}{٤}$)

أى أن ٢ س - ص - $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ = ٠

(٥) ص = $\frac{٦ ظا س}{١ - ظا^٢ س}$ ∴ ص = ٣ ظا ٢ س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٦ قا^٢ ٢ س

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س = \frac{\pi}{٦}}$ = ٢٤

، عند س = $\frac{\pi}{٦}$ فإن ص = ٣ $\sqrt{٣}$

∴ النقطة ($\frac{\pi}{٦}$ ، ٣ $\sqrt{٣}$)

∴ معادلة المماس هى

(ص - ٣ $\sqrt{٣}$) = ٢٤ (س - $\frac{\pi}{٦}$)

أى أن ٢٤ س - ص - ٤ π + ٣ $\sqrt{٣}$ = ٠

(٦) جا س = جتا ٣ ص (بالاشتقاق بالنسبة فى س)

∴ جتا س = -٣ جا ٣ ص $\frac{ءص}{ءس}$

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{- جتا س}{٣ جا ٣ ص}$ ∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(٠ ، \frac{\pi}{٦})}$ = $-\frac{١}{٣}$

∴ معادلة المماس هى $\frac{ص - \frac{\pi}{٦}}{س - ٠}$ = $-\frac{١}{٣}$

أى أن س + ٣ ص - $\frac{\pi}{٢}$ = ٠

(٧) د (س) = ٢ ظا^٣ س (بالاشتقاق بالنسبة فى س)

∴ د َ(س) = ٦ ظا^٢ س . قا^٢ س

∴ د َ($\frac{\pi}{٤}$) = ٦ × ١ × ($\sqrt{٢}$)^٢ = ١٢ = ميل المماس

، ∵ د ($\frac{\pi}{٤}$) = ٢ ظا^٣ ($\frac{\pi}{٤}$) = ٢

∴ النقطة ($\frac{\pi}{٤}$ ، ٢)

∴ معادلة المماس هى $\frac{ص - ٢}{س - \frac{\pi}{٤}}$ = ١٢

أى أن ١٢ س - ص - ٣ π + ٢ = ٠

١٤

(١) ص = س^٢ - ٢ س + ٣

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ س - ٢ ∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س = ١}$ = ٠

∴ العمودى يوازى محور الصادات وتكون معادلته

س = ١

(٢) ∵ س ص = ٦ ∴ ص = ٦ س^{-١}

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = -٦ س^{-٢} = $\frac{-٦}{س^٢}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س = ٢}$ = $\frac{-٣}{٢}$

∴ ميل العمودى = $\frac{٢}{٣}$

∴ معادلة العمودى هى $\frac{ص - ٣}{س - ٢}$ = $\frac{٢}{٣}$

أى أن ٢ س - ٣ ص + ٥ = ٠

(٣) ∵ س^٢ + ص^٢ + ٢ س = ٩

∴ ٢ س + ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ + ٢ = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{-٢ - ٢ س}{٢ ص}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(١ ، ٢)}$ = -٣

∴ ميل المماس = -٣ ، ميل العمودى = $\frac{١}{٣}$

∴ معادلة العمودى هى ص - ١ = $\frac{١}{٣}$ (س - ٢)

أى أن س - ٣ ص + ١ = ٠

(٤) س^٣ + ص^٣ = ٦ س ص

∴ ٣ س^٢ + ٣ ص^٢ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٦ ص + ٦ س $\frac{ءص}{ءس}$

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{٢ ص - س^٢}{ص^٢ - ٢ س}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(٣ ، ٣)}$ = -١ ∴ ميل العمودى = ١

∴ معادلة العمودى هى : ص - ٣ = ١ (س - ٣)

أى أن : س - ص = ٠

(٥) ص = ٤ + ظتا س - ظتا^٢ س

$\frac{ءص}{ءس}$ = - قتا^٢ س - ٢ قتا س . قتا س ظتا س

= - قتا^٢ س - ٢ قتا^٢ س ظتا س

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س = \frac{\pi}{٤}}$ = -٦

∴ ميل المماس = -٦ ∴ ميل العمودى = $\frac{١}{٦}$

، ∵ عند س = $\frac{\pi}{٤}$ ∴ ص = ٢

∴ النقطة ($\frac{\pi}{٤}$ ، ٢)

∴ معادلة العمودى هى

(ص - ٢) = $\frac{١}{٦}$ (س - $\frac{\pi}{٤}$)

أى أن : ٤ س - ٢٤ ص - π + ٧٢ = ٠

(٦) ص = س |س| ∵ س = -٢

∴ ص = س (-س) = -س^٢

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = -٢ س ∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(-٢ ، -٤)}$ = ٤

∴ ميل العمودى = $\frac{-١}{٤}$

معادلة العمودى هى $\frac{ص + ٤}{س + ٢}$ = $\frac{-١}{٤}$

أى أن س + ٤ ص + ١٨ = ٠

١٥

∵ ص^٢ = س - ١ ∴ ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ١

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{١}{٢ ص}$ ∴ $\frac{١}{٢ ص}$ = $\frac{-١}{٢}$

∴ ص = -١ ومنها س = ٢ ∴ النقطة (٢ ، -١)

∴ معادلة المماس هى (ص + ١) = $\frac{-١}{٢}$ (س - ٢)

أى أن ص = - $\frac{١}{٢}$ س

١٦

س^٢ + ص^٢ - ٢ ك س + ١٢ = ٠

، ∵ (٤ ، -٢) تحقق المعادلة :

∴ ٤^٢ + (-٢)^٢ - ٢ ك (٤) + ١٢ = ٠

-٨ ك = -٣٢ ∴ ك = ٤

∴ معادلة المنحنى س^٢ + ص^٢ - ٨ س + ١٢ = ٠

٢ س + ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ - ٨ = ٠

$\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{٤ - س}{ص}$

ميل مماس المنحنى عند النقطة (٤ ، -٢) = صفر

∴ معادلة المماس $\frac{ص + ٢}{س - ٤}$ = صفر

ص + ٢ = ٠

١٧

ص = جا ٢ س - جتا س

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ جتا ٢ س + جا س

∵ ميل المماس = ظا $\frac{٣\pi}{٤}$ = -١

بوضع $\frac{ءص}{ءس}$ = -١ ∴ ٢ جتا ٢ س + جا س = -١

٢ (١ - ٢ جا^٢ س) + جا س = -١

٤ جا^٢ س - جا س - ٣ = ٠

∴ (جا س - ١) (٤ جا س + ٣) = ٠

∴ جا س = ١ أ، جا س = $\frac{-٣}{٤}$

(مرفوض لأن س ∈ [٠ ، π])

∴ س = $\frac{\pi}{٢}$

، ∵ عند س = $\frac{\pi}{٢}$ ∴ ص = صفر

النقطة هى : ($\frac{\pi}{٢}$ ، ٠)

معادلة المماس $\frac{ص - ٠}{س - \frac{\pi}{٢}}$ = -١

٢ س + ٢ ص - π = ٠

١٨

(١) س^٢ + ص^٢ = ٥٢

∴ ٢ س + ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{-س}{ص}$

∴ ميل المماس = $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(٤ ، -٦)}$ = $\frac{٢}{٣}$

∴ معادلة المماس $\frac{ص + ٦}{س - ٤}$ = $\frac{٢}{٣}$

أى أن ٢ س - ٣ ص - ٢٦ = ٠

∴ ميل العمودي = $-\frac{1}{٣}$

∴ معادلة العمودي هي $\frac{ص - ١}{س - ١} = -\frac{١}{٣}$

أي أن : $٣ ص + س - ٤ = ٠$

[illegible]

∴ ميل المماس = $\frac{٣}{٤}$

∴ معادلة المماس هي $\frac{ص - ٢}{س - ١} = \frac{٣}{٤}$

أي أن : $٣ س - ٤ ص + ٥ = ٠$

∴ ميل العمودي = $-\frac{٤}{٣}$

∴ معادلة العمودي هي $\frac{ص - ٢}{س - ١} = -\frac{٤}{٣}$

أي أن : $٤ س + ٣ ص - ١٠ = ٠$

⑦ $س^٢ - ٢ س ص - ص^٢ + ١ = ٠$

∴ $٢ س - ٢ (س \frac{ءص}{ءس} + ص) - ٢ ص \frac{ءص}{ءس} = ٠$

∴ ميل المماس = ١ ، ميل العمودي = -١

∴ معادلة المماس هي : $(ص - ١) = ١ (س - ١)$

أي أن : $ص = س$

∴ معادلة العمودي هي : $(ص - ١) = -١ (س - ١)$

أي أن : $ص = -س + ٢$

⑧ $س^٢ ص^٢ - ٢ س - ٤ ص + ٤ = ٠$

∴ $٢ س ص^٢ + ٢ س^٢ ص \frac{ءص}{ءس} - ٢ - ٤ \frac{ءص}{ءس} = ٠$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١ - س ص^٢}{س^٢ ص - ٢}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right) = -٢$

∴ ميل المماس = -٢

∴ معادلة المماس هي $\frac{ص - ١}{س - ١} = -٢$

أي أن $٣ س - ص + ١ = ٠$

∴ ميل العمودي = $\frac{١}{٣}$

∴ معادلة العمودي هي $\frac{ص - ٤}{س - ١} = \frac{١}{٣}$

أي أن $س - ٣ ص + ١١ = ٠$

⑤ $ص^٢ = ٤ س - ٤ = ٠$

∴ $٢ ص \frac{ءص}{ءس} = ٤$

[illegible]

∴ ميل المماس = $\frac{١}{٢}$

∴ معادلة المماس هي $\frac{ص - ٢}{س - ٢} = \frac{١}{٢}$

أي أن $س - ٢ ص + ٢ = ٠$

∴ ميل العمودي = -٢

∴ معادلة العمودي هي $\frac{ص - ٢}{س - ٢} = -٢$

أي أن $٢ س + ص - ٦ = ٠$

⑥ $ص^٢ = \frac{٨}{٤ - س}$ $ص^٢ = ٨ (٤ - س)^{-١}$

∴ $٢ ص \frac{ءص}{ءس} = ٨ (٤ - س)^{-٢}$

∴ ميل المماس = ١

∴ معادلة المماس هي $\frac{ص - ٢}{س - ٢} = ١$

أي أن $س - ص = ٠$

∴ ميل العمودي = -١

∴ معادلة العمودي هي $\frac{ص - ٢}{س - ٢} = -١$

أي أن $س + ص - ٤ = ٠$

⑦ $ص = ٢ جا س - ظا س$ ∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٢ جتا س - قا^٢ س$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س = \frac{π}{٣}} = ٤$

∴ ميل المماس = ٤ ، ميل العمودي = $-\frac{١}{٤}$

∴ عند س = $\frac{π}{٣}$ فإن ص = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ [illegible]

∴ معادلة المماس هي [illegible]

أي أن [illegible]

∴ معادلة العمودي [illegible]

أي أن [illegible]

⑧ $ص = ٢ جا س - ظا س$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٢ جتا س - قا^٢ س$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right) = ٢ - ٢\sqrt{٣}$

∴ ميل المماس = $٢ - ٢\sqrt{٣}$ ، ميل العمودي = $\frac{-١}{٢ - ٢\sqrt{٣}}$

∴ عند س = $\frac{π}{٣}$ فإن ص = ١

∴ النقطة هي $(\frac{π}{٣} ، ١)$

∴ معادلة المماس $\frac{ص - ١}{س - \frac{π}{٣}} = ٢ - ٢\sqrt{٣}$

أي أن [illegible]

∴ معادلة العمودي $\frac{ص - ١}{س - \frac{π}{٣}} = \frac{-١}{٢ - ٢\sqrt{٣}}$

أي أن [illegible]

⑨ $ص = ٢ - ظا س$ ∴ $\frac{ءص}{ءس} = -قا^٢ س$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right) = ٢\sqrt{٣}$

∴ ميل المماس = $٢\sqrt{٣}$ ، ميل العمودي = $\frac{-١}{٢\sqrt{٣}}$

∴ عند س = $\frac{π}{٣}$ ∴ ص = ١

∴ النقطة $(\frac{π}{٣} ، ١)$

∴ معادلة المماس $\frac{ص - ١}{س - \frac{π}{٣}} = ٢\sqrt{٣}$

أي أن $٢\sqrt{٣} س - ص - \frac{٢}{٣}\sqrt{٣} π + ١ = ٠$

∴ معادلة العمودي $\frac{ص - ٠}{س - \frac{π}{٢}} = \frac{-١}{π}$

أي أن [illegible]

⑩ $ص = ٢ ظا س$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٢ قا^٢ س$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right) = ٤$ ، ميل المماس = ٤

∴ ميل العمودي = $-\frac{١}{٤}$

∴ عند س = $\frac{π}{٤}$ ∴ ص = ٢

∴ النقطة $(\frac{π}{٤} ، ٢)$

∴ معادلة المماس $\frac{ص - ٢}{س - \frac{π}{٤}} = ٤$

أي أن $٤ س - ص - π + ٢ = ٠$

∴ معادلة العمودي $\frac{ص - ٢}{س - \frac{π}{٤}} = -\frac{١}{٤}$

أي أن $٤ س + ١٦ ص - π - ٣٢ = ٠$

⑪ $ص = س جا ٢ س - جا س$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = جا ٢ س + ٢ س جتا ٢ س - جتا س$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right) = -٢$ ∴ ميل المماس = -٢

∴ معادلة المماس $ص = -٢ س$

∴ ميل العمودي $\frac{١}{٢}$

∴ معادلة العمودي $ص = \frac{١}{٢} س$

⑫ $ص = س^٢ جا \frac{π}{٢} س$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٢ س جا \frac{π}{٢} س + \frac{π}{٢} س^٢ جتا \frac{π}{٢} س$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right) = -٢ π$

∴ ميل المماس = $-٢ π$

∴ معادلة المماس هي $\frac{ص - ٠}{س - ٢} = -٢ π$

أي أن $٢ π س + ص - ٤ π = ٠$

∴ ميل العمودي = $\frac{١}{٢ π}$

∴ معادلة العمودي هي $\frac{ص - ٠}{س - ٢} = \frac{١}{٢ π}$

∴ معادلة العمودي $س - ٢ π ص - ٢ = ٠$

⑬ $ص = \sqrt{جا س + جتا س}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{جتا س - جا س}{٢\sqrt{جا س + جتا س}}$

، عند س = $\frac{π}{٤}$ فإن ص = $\sqrt[٤]{٢}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(\frac{π}{٤} ، \sqrt[٤]{٢})} = ٠$

∴ ميل المماس = ٠ ، معادلته ص = $\sqrt[٤]{٢}$

، ميل العمودي = $\frac{١}{٠}$ (غير معرف)

∴ معادلته س = $\frac{π}{٤}$

⑭ $س جا ٢ ص = ص جا ٢ س$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ $جا ٢ ص + ٢ س جتا ٢ ص \frac{ءص}{ءس}$

$= \frac{ءص}{ءس} جا ٢ س + ٢ ص جتا ٢ س$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{جا ٢ ص - ٢ ص جتا ٢ س}{جا ٢ س - ٢ س جتا ٢ ص}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(\frac{π}{٤} ، \frac{π}{٤})} = ١$

∴ ميل المماس = ١ ، ميل العمودي = -١

∴ معادلة المماس $\frac{ص - \frac{π}{٤}}{س - \frac{π}{٤}} = ١$

أي أن $س - ص = ٠$

∴ معادلة العمودي $\frac{ص - \frac{π}{٤}}{س - \frac{π}{٤}} = -١$

ومنها $س + ص - \frac{π}{٢} = ٠$

⑮ $(جا س + جتا س) ص = جتا^٢ س$

عند س = $\frac{π}{٢}$ ∴ ص = ٠

∴ النقطة هي $(\frac{π}{٢} ، ٠)$

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

$(جا س + جتا س) \frac{ءص}{ءس} + (جتا س - جا س) ص$

$= -٢ جتا س جا س$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-٢ جا س جتا س - (جتا س - جا س) ص}{جا س + جتا س}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(\frac{π}{٢} ، ٠)} = ٠$ ∴ ميل المماس = ٠

∴ معادلة المماس هي ص = ٠

وميل العمودي = $\frac{١}{٠}$ (غير معرف)

∴ معادلة العمودي تكون س = $\frac{π}{٢}$

١٣

① $س = ن^٢ + ٤ ن$ ∴ $\frac{ءس}{ءن} = ٢ ن + ٤$

، $ص = ٢ ن^٢$ ∴ $\frac{ءص}{ءن} = ٤ ن$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \div \frac{ءس}{ءن} = \frac{٤ ن}{٢ ن + ٤}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{ن = ١} = \frac{٢}{٣}$ ∴ ميل المماس = $\frac{٢}{٣}$

، ميل العمودي = $-\frac{٣}{٢}$

، عند ن = ١ س = ٥ ، ص = ٢

∴ النقطة هي (٥ ، ٢)

∴ معادلة المماس $\frac{ص - ٢}{س - ٥} = \frac{٢}{٣}$

أي أن $٢ س - ٣ ص - ٤ = ٠$

، معادلة العمودي $\frac{ص - ٢}{س - ٥} = -\frac{٣}{٢}$

$٣ س + ٢ ص - ١٩ = ٠$

② $س = ن^٢ + ٢ ن + ٣$ ∴ $\frac{ءس}{ءن} = ٢ ن + ٢$

، $ص = ٢ ن^٣ - ٦ ن + ١٠$ ∴ $\frac{ءص}{ءن} = ٦ ن^٢ - ٦$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٦ ن^٢ - ٦}{٢ ن + ٢} = \frac{٦ (ن - ١)(ن + ١)}{٢ (ن + ١)}$

$= ٣ (ن - ١)$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{ن = ١} = -٣$ ∴ ميل المماس = -٣

، ميل العمودي = $\frac{١}{٣}$

، عند ن = ٠ ∴ س = ٣ ، ص = ١

∴ النقطة هي (٣ ، ١)

∴ معادلة المماس $\frac{ص - ١}{س - ٣} = -٣$

أي أن $٣ س + ص - ١٠ = ٠$

، معادلة العمودي $\frac{ص - ١}{س - ٣} = \frac{١}{٣}$

أي أن $س - ٣ ص = ٠$

③ $س = ن^٢ - ٦$ ∴ $\frac{ءس}{ءن} = ٢ ن - ٦$

، $ص = ٨ \sqrt{ن - ٢}$ ∴ $\frac{ءص}{ءن} = \frac{٤}{\sqrt{ن - ٢}}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٤}{\sqrt{ن - ٢}} \div (٢ ن - ٦) = \frac{٢}{(ن - ٣)\sqrt{ن - ٢}}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right) = \frac{٢}{٢ \times ٢} = \frac{١}{٢}$

∴ ميل المماس = $\frac{١}{٢}$ ، ميل العمودي = -٢

، عند ن = ٦ ∴ س = ٠ ، ص = ١٦

∴ النقطة هي (٠ ، ١٦)

∴ ميل معادلة المماس $\frac{ص - ١٦}{س - ٠} = \frac{١}{٢}$

∴ $س - ٢ ص + ٤٨ = ٠$

، معادلة العمودي $\frac{ص - ١٦}{س - ٠} = -٢$

$٢ س + ص - ١٦ = ٠$

④ $س = ن^٣ - ٦$ ∴ $\frac{ءس}{ءن} = ٣ ن^٢$

، $ص = \sqrt[٣]{ن^٣ - ٤}$

∴ $\frac{ءص}{ءن} = \frac{١}{٣ \sqrt[٣]{(ن^٣ - ٤)^٢}}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٣ ن^٢ \sqrt[٣]{(ن^٣ - ٤)^٢}}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{ن = ٢} = \frac{١}{١٢}$ ∴ ميل المماس = $\frac{١}{١٢}$

، ميل العمودي = -١٢

عند ن = ٢ ∴ س = ٢ ، ص = ١

∴ النقطة هي (٢ ، ١)

∴ معادلة المماس $\frac{ص - ١}{س - ٢} = \frac{١}{١٢}$

$س - ١٢ ص + ١٠ = ٠$

، معادلة العمودي $\frac{ص - ١}{س - ٢} = -١٢$

$١٢ س + ص - ٢٥ = ٠$

⑤ $س = جا θ$ $\frac{ءس}{ءθ} = -جا θ$

، $ص = \sqrt{٢} + جا θ$ $\frac{ءص}{ءθ} = جتا θ$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{جتا θ}{-جا θ} = -ظتا θ$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{θ = \frac{π}{٤}} = -١$

∴ ميل المماس = -١ ، ميل العمودي = ١

، عند θ = $\frac{π}{٤}$

∴ س = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ، ص = $\frac{٣\sqrt{٢}}{٢}$

∴ النقطة = $(\frac{\sqrt{٢}}{٢} ، \frac{٣\sqrt{٢}}{٢})$

∴ معادلة المماس $\frac{ص - \frac{٣\sqrt{٢}}{٢}}{س - \frac{\sqrt{٢}}{٢}} = -١$

أي أن : $س + ص - ٢\sqrt{٢} = ٠$

، معادلة العمودي $\frac{ص - \frac{٣\sqrt{٢}}{٢}}{س - \frac{\sqrt{٢}}{٢}} = ١$

أي أن : $س - ص + \sqrt{٢} = ٠$

⑥ $س = قا θ$ ∴ $\frac{ءس}{ءθ} = قا θ ظا θ$

، $ص = ظا θ$ ∴ $\frac{ءص}{ءθ} = قا^٢ θ$

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{...}{...}$ = ظا θ

∴ $\left(\frac{دص}{دس}\right)_{θ = \frac{π}{4}}$ = ٢

∴ ميل المماس = ٢ ، ميل العمودى = $-\frac{1}{2}$

، عند θ = $\frac{π}{4}$ فإن س = $\frac{٢\sqrt{٢}}{٢}$ ، ص = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

∴ النقطة $\left(\frac{٢\sqrt{٢}}{٢} ، \frac{\sqrt{٢}}{٢}\right)$

∴ معادلة المماس $\frac{ص - \frac{\sqrt{٢}}{٢}}{س - \frac{٢\sqrt{٢}}{٢}}$ = ٢

أى أن ٢ س − ص − $\sqrt{٢}$ = ٠

، معادلة العمودى $\frac{ص - \frac{\sqrt{٢}}{٢}}{س - \frac{٢\sqrt{٢}}{٢}} = -\frac{1}{2}$

أى أن ٢ س + ٦ ص − ٤ $\sqrt{٢}$ = ٠

٧ س = قا θ ∴ $\frac{دس}{دθ}$ = − قتا θ ظتا θ

، ص = ظا θ + قا θ

∴ $\frac{دص}{دθ}$ = − قتا θ ظتا θ − قتا^2 θ

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{- قتا θ ظتا θ - قتا^2 θ}{- قتا θ ظتا θ}$ = ١ + قا θ

∴ $\left(\frac{دص}{دس}\right)_{θ = \frac{π}{2}}$ = ٢

∴ ميل المماس = ٢ ، ميل العمودى = $-\frac{1}{2}$

، عند θ = $\frac{π}{2}$ ∴ س = $\frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$ ، ص = $\sqrt{٣}$

فإن النقطة تكون $\left(\frac{٢}{٣}\sqrt{٣} ، \sqrt{٣}\right)$

∴ معادلة المماس $\frac{ص - \sqrt{٣}}{س - \frac{٢}{٣}\sqrt{٣}}$ = ٢

أى أن ٣ س − ص − $\sqrt{٣}$ = ٠

، معادلة العمودى $\frac{ص - ...}{س - ...} = \frac{...}{...}$

أى أن ٢ س + ٨ ص − ١١ $\sqrt{٣}$ = ٠

٨ س = ٧ + ظا θ ∴ $\frac{دس}{دθ}$ = قا^2 θ

، ص = ... θ + ٦ ظا θ

∴ $\frac{دص}{دθ}$ = ...

∴ $\frac{دص}{دس}$ = ...

∴ $\left(\frac{دص}{دس}\right)_{θ = \frac{π}{4}} = \frac{٢}{٣}$

∴ ميل المماس = $\frac{٢}{٣}$ ، ميل العمودى = $-\frac{٣}{٢}$

عند θ = $\frac{π}{4}$ ∴ س = ٨ ، ص = $\frac{٩}{٢}$

∴ النقطة = $\left(٨ ، \frac{٩}{٢}\right)$

∴ معادلة المماس $\frac{ص - \frac{٩}{٢}}{س - ٨} = \frac{٢}{٣}$

أى أن ٣ س + ٢ ص − ٣٩ = ٠

، معادلة العمودى $\frac{ص - \frac{٩}{٢}}{س - ٨} = -\frac{٣}{٢}$

أى أن ٤ س − ٦ ص − ١٧ = ٠

٩ س = قا^2 θ − ١

∴ $\frac{دس}{دθ}$ = ٢ قا θ قا θ ظا θ = ٢ قا^2 θ ظا θ

، ص = ظا θ ∴ $\frac{دص}{دθ}$ = قا^2 θ

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{قا^2 θ}{٢ قا^2 θ ظا θ} = \frac{١}{٢ ظا θ}$

∴ $\left(\frac{دص}{دس}\right)_{θ = -\frac{π}{4}} = -\frac{١}{٢}$

∴ ميل المماس = $-\frac{١}{٢}$ ، ميل العمودى = ٢

عند θ = $-\frac{π}{4}$ فإن س = ١ ، ص = −١

∴ النقطة تكون (١ ، −١)

∴ معادلة المماس $\frac{ص + ١}{س - ١} = -\frac{١}{٢}$

...

لإيجاد نقط التقاطع بحل المعادلتين ص = س^2 + س

، ص − ٢ س = ٠ معًا

∴ س^2 + س = ٢ س ∴ س^2 − س = ٠

...

∴ س = $\sqrt{٦ - س}$ وبتربيع الطرفين

∴ س^2 = ٦ − س ∴ س^2 + س − ٦ = ٠

∴ (س + ٣) (س − ٢) = ٠

∴ س = −٣ (مرفوض) أ، س = ٢

وعند س = ٢ ∴ ص = ٢

∴ نقطة التقاطع هى (٢ ، ٢)

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢}(٦ - س)^{-\frac{١}{٢}} \times -١ = \frac{-١}{٢\sqrt{٦ - س}}$

∴ $\left(\frac{دص}{دس}\right)_{(٢ ، ٢)} = \frac{-١}{٤}$

∴ ميل العمودى = ٤

∴ معادلة العمودى هى ص − ٢ = ٤ (س − ٢)

أى أن ص − ٤ س + ٦ = ٠

١٣

$\frac{دص}{دس}$ = − جا (س + ص) $\left(١ + \frac{دص}{دس}\right)$

∵ $\frac{دص}{دس}$ = الميل = $-\frac{١}{٢}$

∴ $-\frac{١}{٢}$ = − جا (س + ص) × $\frac{١}{٢}$

∴ جا (س + ص) = ١ (١)

∴ س + ص = $\frac{π}{2}$ + ٢ ن π حيث ن ∈ ص

∴ ص = جتا $\left(\frac{π}{2} + ٢ ن π\right)$ = جتا $\frac{π}{2}$ = صفر (٢)

من (١) ، (٢) ∴ جا س = ١

∴ س = $\frac{π}{2}$ لأن س ∈ [٠ ، π]

∴ نقطة التماس هى $\left(\frac{π}{2} ، ٠\right)$

∴ معادلة المماس هى ص − ٠ = $-\frac{١}{٢}$ $\left(س - \frac{π}{2}\right)$

∴ ٢ س + ٤ ص − π = ٠

١٤

١ ع (س) = د (س) × ر (س)

ع َ(س) = د َ(س) × ر (س) + د (س) × ر َ(س)

عند س = ٣

ع (٣) = د (٣) × ر (٣) = ٧

∴ النقطة (٣ ، ٧)

ع َ(٣) = −١ × ٧ + ١ × ٦ = −١

∴ ميل المماس = −١

∴ معادلة المماس $\frac{ص - ٧}{س - ٣}$ = −١

∴ س + ص − ١٠ = ٠

، معادلة العمودى $\frac{ص - ٧}{س - ٣}$ = ١

∴ س − ص + ٤ = ٠

٢ ع (س) = د (س) ÷ ر (س)

ع َ(س) = $\frac{ر (س) د َ(س) - د (س) ر َ(س)}{(ر (س))^2}$

عند س = ٧

ع (٧) = $\frac{-٢}{١}$ = −٢ ∴ النقطة (٧ ، −٢)

، ع َ(س) = $\frac{١ \times ٢ - (-٢) \times ٥}{(١)^2}$ = ١٢

∴ ميل المماس = ١٢

∴ معادلة المماس $\frac{ص + ٢}{س - ٧}$ = ١٢

∴ ١٢ س − ص − ٨٦ = ٠

، معادلة العمودى $\frac{ص + ٢}{س - ٧} = \frac{-١}{١٢}$

∴ س + ١٢ ص + ١٧ = ٠

٣ ع (س) = د (ر (س))

∴ ع َ(س) = د َ(ر (س)) . ر َ(س)

، ع (٣) = د (ر (٣)) = د (٧) = −٢

∴ النقطة (٣ ، −٢)

، ع َ(٣) = د َ(ر (٣)) . ر َ(٣) = د َ(٧) × ٦

= ٢ × ٦ = ١٢

∴ ميل المماس = ١٢

∴ معادلة المماس $\frac{ص + ٢}{س - ٣}$ = ١٢

∴ ١٢ س − ص − ٣٨ = ٠

، معادلة العمودى $\frac{ص + ٢}{س - ٣} = \frac{-١}{١٢}$

∴ س + ١٢ ص + ٢١ = ٠

١٥

١ (ب)	٢ (ب)	٣ (جـ)	٤ (د)
٥ (جـ)	٦ (ب)	٧ (أ)	٨ (جـ)
٩ (ب)	١٠ (جـ)	١١ (د)	١٢ (ب)
١٣ (ب)	١٤ (أ)	١٥ (جـ)	١٦ (جـ)
١٧ (أ)	١٨ (د)	١٩ (د)	٢٠ (ب)
٢١ (د)	٢٢ (أ)	٢٣ (د)	٢٤ (د)
٢٥ (جـ)	٢٦ (د)	٢٧ (جـ)	٢٨ (د)
٢٩ (ب)			

١٦

∵ ص = س^3 + ٣ س − ٢

∴ $\frac{دص}{دس}$ = ٣ س^2 + ٣ (كمية موجبة لجميع قيم س)

∴ ميل المماس عند أى نقطة على المنحنى كمية موجبة

∴ المماس عند أى نقطة على المنحنى يميل بزاوية حادة على الاتجاه الموجب لمحور السينات

، عند النقطة (١ ، ٢)

∴ $\frac{دص}{دس}$ = ٦ ∴ ميل العمودى = $\frac{-١}{٦}$

∴ معادلة العمودى هى $\frac{ص - ٢}{س - ١} = \frac{-١}{٦}$

أى أن س + ٦ ص − ١٣ = ٠

١٧

٢ ص = جا ٢ س ∴ ص = $\frac{١}{٢}$ جا ٢ س

∴ $\frac{دص}{دس}$ = جتا ٢ س

١ جتا ٢ س = ٠

∴ ٢ س = $\frac{π}{2}$ ∴ س = $\frac{π}{4}$

أ، ٢ س = $\frac{٣π}{2}$ ∴ س = $\frac{٣π}{4}$

٢ عند س = $\frac{π}{4}$ ∴ ص = $\frac{١}{٢}$

∴ النقطة $\left(\frac{π}{4} ، \frac{١}{٢}\right)$

معادلة المماس ٢ ص − ١ = ٠

، معادلة العمودى س = $\frac{π}{4}$

عند س = $\frac{٣π}{4}$ ∴ ص = $-\frac{١}{٢}$

∴ النقطة $\left(\frac{٣π}{4} ، -\frac{١}{٢}\right)$

معادلة المماس ٢ ص + ١ = ٠

معادلة العمودى س = $\frac{٣π}{4}$

١٨

ص = ٤ − س^2 ∴ $\frac{دص}{دس}$ = −٢ س

∴ $\left(\frac{دص}{دس}\right)_{(١ ، ٣)}$ = −٢ ∴ ميل العمودى = $\frac{١}{٢}$

∴ معادلة العمودى س − ٢ ص + ٥ = ٠

وبحل المعادلتين ص = ٤ − س^2

، س − ٢ ص + ٥ = ٠ معًا

∴ س − ٢ (٤ − س^2) + ٥ = ٠

∴ ٢ س^2 + س − ٣ = ٠

∴ (س − ١) (٢ س + ٣) = ٠

∴ س = ١ النقطة الأولى (١ ، ٣) أ، س = $\frac{-٣}{٢}$

∴ النقطة الثانية حـ $\left(\frac{-٣}{٢} ، \frac{٧}{٤}\right)$

∵ $\left(\frac{دص}{دس}\right)_{س = \frac{-٣}{٢}}$ = ٣

∴ معادلة المماس عند حـ هى $\frac{ص - \frac{٧}{٤}}{س + \frac{٣}{٢}}$ = ٣

أى أن ١٢ س − ٤ ص + ٢٥ = ٠

١٩

∵ $\frac{دص}{دس}$ = ٤ س^3 − ٤ س − ١ (١)

∴ $\left(\frac{دص}{دس}\right)_{(-١ ، ٠)}$ = −١

∴ معادلة المماس هى ص − ٠ = −١ × (س + ١)

∴ ص = − س − ١

وبحل معادلة المماس والمنحنى معًا

∴ س^4 − ٢ س^2 − س = − س − ١

∴ (س^2 − ١)^2 = ٠ ∴ س = ± ١

∴ المماس يقطع المنحنى عند نقطة ب التى إحداثيها السينى = ١ ، ب (١ ، ٢)
∴ ب = (١ ، ٢) ، س (١) ميل المماس = ١
∴ ميل العمودى = ١
∴ معادلة العمودى عند النقطة ب هى
ص - ٢ = س - ١
أى أن : س - ص + ١ = ٠

٣٠

∵ ص٢ (٢أ - س) = س٣
∴ ٢ ص ءص/ءس (٢أ - س) - ص٢ = ٣ س٢
∴ ءص/ءس = (٣ س٢ + ص٢) / (٢ ص (٢أ - س)) ، (ءص/ءس) عند (أ ، أ) = ٢
∴ متجه اتجاه المستقيم هو (١ ، ٢)
معادلة المماس : ر = (أ ، أ) + ك (١ ، ٢)
معادلة العمودى : ر = (أ ، أ) + ك (-٢ ، ١)

٣١

أى نقطة (س١ ، ص١) تقع على منحنى الدالة تحقق معادلته
∴ ص١ = س١٣
، ∵ ءص/ءس = ٣ س٢
∴ ميل المماس عند النقطة (س١ ، س١٣) = ٣ س١٢ (١)
، ∵ المماس يمر بالنقطتين (٤ ، ٠) ، (س١ ، س١٣)
∴ ميل المماس = س١٣ / (س١ - ٤) (٢)
من (١) ، (٢) : ∴ س١٣ / (س١ - ٤) = ٣ س١٢
∴ س١٣ = ٣ س١٣ - ١٢ س١٢
∴ ٢ س١٣ - ١٢ س١٢ = ٠
∴ ٢ س١٢ (س١ - ٦) = ٠
∴ س١ = ٠ أو س١ = ٦
ومنها ص١ = صفر أو ص١ = ٢١٦
∴ النقط هى (٠ ، ٠) ، (٦ ، ٢١٦)

٣٢

∵ ص = س٢ ويفرض أن نقطة التماس هى (أ ، ب)
∴ ب = أ٢ (١)
∵ ءص/ءس = ٢ س ، عند س = أ فإن ءص/ءس = ٢أ
∴ معادلة المماس هى ص - ص١ = م (س - س١)
∴ ص - ب = ٢أ (س - أ)
∴ ص - أ٢ = ٢أ (س - أ)
، ∵ النقطة (٣ ، ء) تقع على المماس
∴ ء - أ٢ = ٢أ (٣ - أ)
∴ ء - أ٢ = ٦أ - ٢أ٢ ∴ أ٢ - ٦أ + ء = ٠
∴ (أ - ١) (أ - ء) = ٠
∴ أ = ١ أو أ = ء ومنها ب = ١ أو ب = ء٢
∴ معادلة المماس هى ص - ١ = ٢ (س - ١)
أى أن ص - ٢ س + ١ = ٠
أو ص - ء٢ = ١٠ (س - ء)
أى أن ص - ١٠ س + ء٢ = ٠

٣٣

∵ س٢ - ص٢ = ١٦ ويفرض أن نقطة التماس (أ ، ب)
∴ أ٢ - ب٢ = ١٦ (١)
، ٢ س - ٢ ص ءص/ءس = ٠ ، منها ءص/ءس = س/ص
(ءص/ءس) عند (أ ، ب) = أ/ب ∵ ميل المماس = (ب + ٢) / (أ - ٢)
∴ أ/ب = (ب + ٢)/(أ - ٢) منها أ٢ - ب٢ = ٢ (ب + أ) (٢)
من (١) ، (٢) ب = ٨ - أ (٣)

ص (٢) = ١ ، أ٢ - (٨ - أ)٢ = ١٦
أ = ٥ ومنها ب = ٣
∴ معادلة المماس : (ص - ٣)/(س - ٢) = ٥/٣
أى أن ٥ س - ٣ ص - ١٩ = ٠

٣٤

ص = أ س٣ + ب س٢ ∵ (١ ، ٦) تحقق المعادلة
∴ أ + ب = ٦ (١)
∵ ءص/ءس = ٣أ س٢ + ٢ ب س
، ∵ ميل المستقيم المعطى = ١٢
∴ (ءص/ءس) عند (١ ، ٦) = ١٢
٣أ + ٢ب = ١٢
بحل المعادلتين (١) ، (٢) : أ = ٠ ، ب = ٦ (٢)

٣٥

ص = ٣ س٢ - ٧ س + ٤ ∴ ءص/ءس = ٦ س - ٧
بوضع ص = ٠ ∴ ٣ س٢ - ٧ س + ٤ = ٠
∴ (٣ س - ٤) (س - ١) = ٠
∴ س = ٤/٣ ∴ النقطة (٤/٣ ، ٠)
، ميل المماس = (ءص/ءس) عند (٤/٣ ، ٠) = ١
أ ، س = ١ ∴ النقطة (١ ، ٠)
، ميل المماس (ءص/ءس) عند (١ ، ٠) = -١
∵ حاصل ضرب الميلين = -١
∴ المماسان متعامدان.

٣٦

ص = س٢ + ٦ س + ء
∴ ءص/ءس = ٢ س + ٦ ∴ (ءص/ءس) عند (-١ ، ٠) = ٤
∵ ص = س٣ - س٢ - س + ١
∴ ءص/ءس = ٣ س٢ - ٢ س - ١

∴ (ءص/ءس) عند (-١ ، ٠) = ٤
∴ (-١ ، ٠) تحقق كل منهما ولهما نفس الميل
∴ المنحنيان متماسان عند النقطة (-١ ، ٠)
∴ معادلة المماس المشترك (ص - ٠)/(س + ١) = ٤
أى أن ٤ س - ص + ٤ = ٠

٣٧

∵ (-١ ، ٢) تحقق معادلتى المنحنيين
∴ أ + ب = ٢
، جـ + ١ = ٢ (١)
∴ جـ = ١
، ∵ م١ = ءص/ءس = ٢أ س + ب
، م٢ = ءص/ءس = ٢ جـ س
∵ م١ = م٢ عند س = -١ ∴ -٢أ + ب = -٢ (٢)
بحل المعادلتين (١) ، (٢) ∴ أ = ١ ، ب = ٠
∴ معادلة المماس هى ص - ٢ = -٢ (س + ١)
أى أن ٢ س + ص = ٠

٣٨

نفرض ص = س٢ يقطع المستقيم الأفقى ص = ٢ فى النقط (√٢ ، ٢) ، (-√٢ ، ٢)
∴ ءص/ءس = ٢ س
∴ ميل المماس (ءص/ءس) عند (√٢ ، ٢) = ٢√٢
معادلة المماس الأول (ص - ٢) = ٢√٢ (س - √٢)
∴ ٢√٢ س - ص - ٢ = ٠ (١)
وميل المماس الثانى (ءص/ءس) عند (-√٢ ، ٢) = -٢√٢
∴ معادلة المماس الثانى ص - ٢ = -٢√٢ (س + √٢)
٢√٢ س + ص + ٢ = ٠ (٢)
بجمع المعادلتين (١) ، (٢) : ٤√٢ س = ٠ ومنها س = ٠
بالتعويض ص = -٢

أى أن : المماسان يتقاطعان دائمًا فى النقطة (٠ ، -٢) ∈ محور الصادات.

٣٩

(√٣/٢ ، ٣/٤) تحقق كلًا منهما
∴ ٣/٤ = أ (٣/٤) ∴ أ = ١
، ٣/٤ = ب - جـ (٣/٤) ومنها ب = ٣/٤ (جـ + ١)
حاصل ضرب الميلين = -١
ءص/ءس للمنحنى الأول = ٢أ س
، ءص/ءس للمنحنى الثانى = -٢ جـ س
٢أ (√٣/٢) × -٢ جـ (√٣/٢) = -١
٣أ جـ = ١ ، ∵ أ = ١ ∴ جـ = ١/٣ ∴ ب = ١

٤٠

د (س) = { أ س ، س ≤ ٢ ؛ ب ، س > ٢ }
، ∵ الميل = ظا هـ = ٦
∴ دَ (٢) = دَ (٢⁻) = ٦ ∴ ب = ٦
، د (س) متصلة عند س = ٢
∴ د (٢) = د (٢⁻) = د (٢⁺)
∴ ٩ + أ = ٦ × ٢ ∴ أ = ٣

٤١

∵ س٢ + ص٢ = ٥ (١)
∴ ٢ س + ٢ ص ءص/ءس = ٠ ∴ ءص/ءس = -س/ص
∵ -س/ص = ٢ ∴ س = -٢ ص
بالتعويض فى (١) : ٤ ص٢ + ص٢ = ٥
∴ ٥ ص٢ = ٥ ص = ± ١
عند ص = ١ ∴ س = -٢ ∴ النقطة (-٢ ، ١)

∴ معادلة المماس : (ص - ١) = ٢ (س + ٢)
أى أن : ٢ س - ص + ٥ = ٠
، عند ص = -١ ∴ س = ٢
∴ النقطة (٢ ، -١)
(ص + ١) = ٢ (س - ٢)
أى أن : ٢ س - ص - ٥ = ٠

٤٢

∵ س ص = ٨ (١)
∴ س ءص/ءس + ص = ٠ ∴ ءص/ءس = -ص/س
، ∵ ميل المستقيم المعطى هو -٢
∴ -ص/س = -٢ ∴ ص = ٢ س (٢)
وبالتعويض من (٢) فى (١) : ∴ ٢ س٢ = ٨
∴ س٢ = ٤ ∴ س = ± ٢
ومن (٢) : ∴ ص = ± ٤
∴ النقط هى : (٢ ، ٤) ، (-٢ ، -٤)
∴ معادلة المماس الأول (ص - ٤)/(س - ٢) = -٢
أى أن : ص + ٢ س - ٨ = ٠
، معادلة المماس الثانى (ص + ٤)/(س + ٢) = -٢
أى أن ص + ٢ س + ٨ = ٠

٤٣

ص = ٢ س٣ + ٣ س٢ + ٤ س + ٥
ءص/ءس = ٦ س٢ + ٦ س + ٤
∴ ميل المماس عند النقطة (-١ ، ٢) = ٤
بوضع ءص/ءس = ٤
٦ س٢ + ٦ س + ٤ = ٤
٦ س (س + ١) = ٠
س = ٠ ومنها ص = ٥ أو س = -١ ومنها ص = ٢

∴ النقطة الأخرى التى يكون فيها المماس له نفس الميل هى (٠ ، ٥)
معادلة المماس الآخر : (ص - ٥)/(س - ٠) = ٤
∴ ٤ س - ص + ٥ = ٠

٤٤

ميل المماس = ءص/ءس = ٣ س٢ - ٣
، ∵ ميل المستقيم المعطى = -١/٩
∴ ميل المماس المطلوب = ٩
∴ ٣ س٢ - ٣ = ٩ ∴ س٢ = ٤
∴ س = ± ٢
∴ نقطتا التماس هما : (-٢ ، ٣) ، (٢ ، ٧)
∴ معادلتا المماسين هما :
(ص - ٧)/(س - ٢) = ٩ أى أن : ص - ٩ س + ١١ = ٠
، (ص - ٣)/(س + ٢) = ٩ أى أن : ص - ٩ س - ٢١ = ٠

٤٥

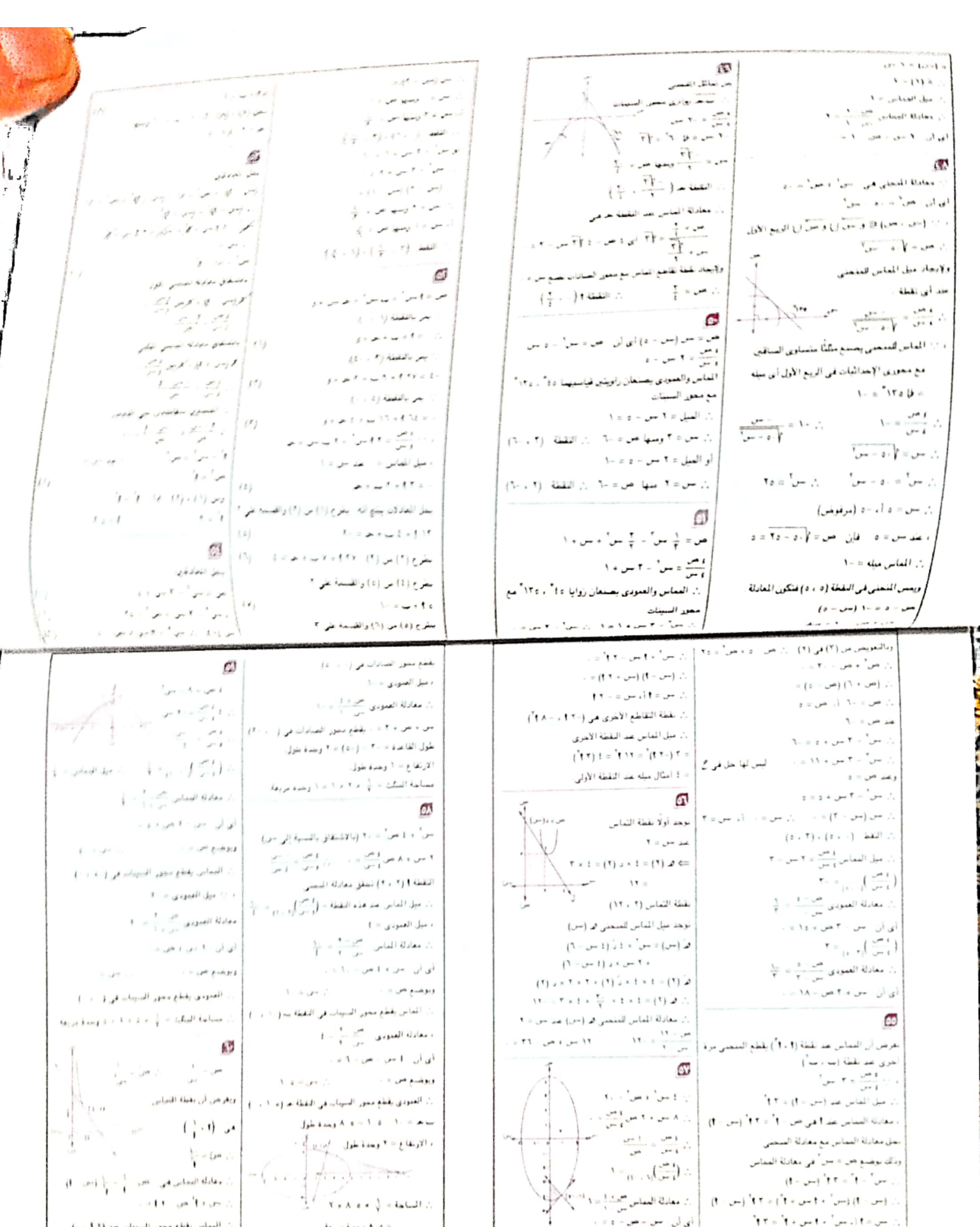
∵ ص = س + ١/س ∴ ءص/ءس = ١ - ١/س٢
، ∵ ميل المستقيم المعطى = -٣
∴ ١ - ١/س٢ = -٣ منها س٢ = ١/٤
∴ س = ± ١/٢
عند س = ١/٢ ومنها ص = ٥/٢
∴ النقطة (١/٢ ، ٥/٢)
∴ معادلة المماس : ص - ٥/٢ = -٣ (س - ١/٢)
أى أن : ٣ س + ص - ٤ = ٠
، عند س = -١/٢ ومنها ص = -٥/٢
معادلة المماس : ص + ٥/٢ = -٣ (س + ١/٢)
أى أن : ٣ س + ص + ٤ = ٠

٤٦

بوضع ص = ٠ فى معادلة المنحنى
∴ س٢ - س - ٢ = ٠
∴ (س - ٢) (س + ١) = ٠
∴ س = ٢ أو س = -١
∴ نقطتا التقاطع مع محور السينات هما (٢ ، ٠) ، (-١ ، ٠)
، ∵ معادلة المنحنى هى
س٢ + ص٢ - س + ٢ ص - ٢ = ٠
∴ ص٢ + ٢ ص = ٢ + س - س٢
وبإجراء الاشتقاق للطرفين بالنسبة لـ س
∴ ٢ ص ءص/ءس + ٢ ءص/ءس = ١ - ٢ س
∴ ءص/ءس × (٢ ص + ٢) = ١ - ٢ س
∴ ءص/ءس = (١ - ٢ س)/(٢ ص + ٢)
∴ ميل المماس عند النقطة (٢ ، ٠)
= [ءص/ءس] عند (٢ ، ٠) = (١ - ٢ (٢))/(٢ (٠) + ٢) = -٣/٢
∴ ميل العمودى = ٢/٣
وتكون معادلة العمودى عند هذه النقطة (ص - ٠)/(س - ٢) = ٢/٣
∴ ٣ ص = ٢ س - ٤
، ميل المماس عند النقطة (-١ ، ٠)
= [ءص/ءس] عند (-١ ، ٠) = ٣/٢
∴ ميل العمودى = -٢/٣
وتكون معادلة العمودى عند هذه النقطة (ص - ٠)/(س + ١) = -٢/٣
∴ ٣ ص = -٢ س - ٢

٤٧

∵ د (س) = س٢ ، ر (س) = ١/س
نوجد نقط التقاطع : س٢ = ١/س ∴ س٣ = ١
∴ س = ١ ومنها ص = ١ ∴ النقطة (١ ، ١)



∴ معادلة المنحنى هي: س^٢ + ص^٢ = ٥ ص

أي أن: ص^٢ = ٥ ص - س^٢

∴ الماس للمنحنى يصنع مثلثًا متساوي الساقين

مع محوري الإحداثيات في الربع الأول أي ميله

= ظا ١٣٥° = -١

∴ س = ٥ أو -٥ (مرفوض)

∴ عند س = ٥ فإن ص = √(٥٠ - ٢٥) = ٥

∴ الماس ميله = -١

ويمس المنحنى في النقطة (٥ ، ٥) فتكون المعادلة

ص - ٥ = -١ (س - ٥)

ص = س (س - ٥) أي أن ص = س^٢ - ٥ س

$\frac{د ص}{د س}$ = ٢ س - ٥

الماس والعمودي يصنعان زاويتين قياسيهما ٤٥° ، ١٣٥° مع محور السينات

∴ الميل = ٢ س - ٥ = ١

∴ س = ٣ ومنها ص = -٦ ∴ النقطة (٣ ، -٦)

أو الميل = ٢ س - ٥ = -١

∴ س = ٢ منها ص = -٦ ∴ النقطة (٢ ، -٦)

ص = $\frac{١}{٣}$ س^٣ - $\frac{٣}{٢}$ س^٢ + س + ١

$\frac{د ص}{د س}$ = س^٢ - ٣ س + ١

∴ الماس والعمودي يصنعان زوايا ٤٥° ، ١٣٥° مع محور السينات

نوجد أولاً نقطة التماس

عند س = ٢

نقطة التماس (٢ ، ١٢)

نوجد ميل الماس للمنحنى د (س)

∴ معادلة الماس للمنحنى د (س) عند س = ٢

∴ نقطة التقاطع الأخرى هي (-٢ ، -٢٨)

∴ ميل الماس عند النقطة الأخرى

= ٤ أمثال ميله عند النقطة الأولى

نفرض أن الماس عند نقطة (١ ، ١) يقطع المنحنى مرة أخرى عند نقطة (ب ، ب^٣)

نحل معادلة الماس مع معادلة المنحنى

، يقطع محور الصادات عند (٠ ، ١/٢)

∴ مساحة المثلث المطلوب

= ١/٢ × ٢ × ٢ = ٢ وحدة مربعة

٦١

س² + ٢ س ص + ص² + ١ = ٠

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

٢ س + ٢ ص + ٢ س ءص/ءس + ٢ ص ءص/ءس = ٠

ءص/ءس = (- ٢ س - ٢ ص) / (٢ س + ٢ ص)

(ءص/ءس) عند (-١ ، ١) = ١ ∴ ميل المماس = ١

∴ ميل العمودي = -١

∴ معادلة المماس : (ص - ١)/(س + ١) = ١ منها س - ص + ٢ = ٠

، معادلة العمودي (ص - ١)/(س + ١) = -١ منها س + ص = ٠

∴ المماس يقطع محور السينات في نقطة ب (-٢ ، ٠)

، العمودي يقطع محور السينات في نقطة حـ (٠ ، ٠)

∴ ب حـ = | -٢ - ٠ | = ٢ وحدة طول

∴ مساحة Δ أ ب حـ = ١/٢ × ٢ × ١ = ١ وحدة مربعة

٦٢

لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات نضع ص = ٠

∴ س² - ٢ س - ٢٤ = ٠

∴ (س - ٦) (س + ٤) = ٠

∴ س = ٦ أو س = -٤

∴ المنحنى يقطع محور السينات في (٦ ، ٠) ، (-٤ ، ٠)

∵ س² + ص² - ٢ س + ٤ ص - ٢٤ = ٠

∴ ٢ س + ٢ ص ءص/ءس - ٢ + ٤ ءص/ءس = ٠

ءص/ءس = (١ - س)/(ص + ٢)

∴ (ءص/ءس) عند (٦ ، ٠) = -٥/٢

∴ معادلة المماس (ص)/(س - ٦) = -٥/٢

أي أن ٥ س + ٢ ص - ٣٠ = ٠ (١)

، (ءص/ءس) عند (-٤ ، ٠) = ٥/٢

∴ معادلة المماس (ص)/(س + ٤) = ٥/٢

أي أن ٥ س - ٢ ص + ٢٠ = ٠ (٢)

وبحل المعادلتين (١) ، (٢)

∴ س = ١ ، ص = ١٢,٥

∴ المماسان يتقاطعا معًا في (١ ، ١٢,٥)

∴ المثلث المكون من محور السينات والمماسين ارتفاعه = ١٢,٥ وحدة طول

وطول قاعدته = ٦ - (-٤) = ١٠ وحدة طول

∴ مساحة المثلث = ١/٢ × ١٢,٥ × ١٠

= ٦٢,٥ وحدة مربعة

٦٣

د (س) = س² ∴ دَ (س) = ٢ س

∴ دَ (٢) = ٤ ∴ ميل المماس = ٤

∴ معادلة المماس (ص - ٤)/(س - ٢) = ٤

أي أن ٤ س - ص - ٤ = ٠

وبوضع ص = ٠ ∴ س = ١

∴ المماس يقطع محور السينات في (١ ، ٠)

، ∵ ميل العمودي -١/٤

∴ معادلة العمودي (ص - ٤)/(س - ٢) = -١/٤

أي أن س + ٤ ص - ١٨ = ٠

وبوضع ص = ٠ ∴ س = ١٨

∴ العمودي يقطع محور السينات في (١٨ ، ٠)

---

① (ص - ١)/(س - ٠) = ١ أي أن س - ص + ١ = ٠

② (ص - ١)/(س - ٠) = -١ أي أن س + ص - ١ = ٠

ثانيًا عند النقطة ب (٠ ، -١)

م₁ = -١ ، م₂ = ١ ∴ م₁ × م₂ = -١

∴ المنحنيان يتقاطعان على التعامد عند النقطة (٠ ، -١)

معادلتا المماسين

① (ص + ١)/(س - ٠) = -١ أي أن س + ص + ١ = ٠

② (ص + ١)/(س - ٠) = ١ أي أن س - ص - ١ = ٠

٦٧

∵ النقطة (أ ، ب) تحقق معادلتي المستقيم والمنحنى

∴ المستقيم يقطع المنحنى في النقطة (أ ، ب)

، ∵ (س/أ)^ن + (ص/ب)^ن = ٢

(بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

ن/أ (س/أ)^(ن-١) + ن/ب (ص/ب)^(ن-١) ءص/ءس = ٠

عند النقطة (أ ، ب)

ن/أ × ١ + ن/ب × ١ × ءص/ءس = ٠

∴ ءص/ءس = -ن/أ × ب/ن = -ب/أ

(ميل المماس عند (أ ، ب))

، ∵ ميل المستقيم = - ١/أ ÷ ١/ب = -ب/أ

∴ المستقيم يمس المنحنى عند نقطة (أ ، ب) التي تقع على كليهما لأي قيمة لـ ن

٦٨

١/(٢ √س) + ١/(٢ √ص) ءص/ءس = ٠ ، ءص/ءس = -√ص/√س

∴ (ءص/ءس) عند (س₁ ، ص₁) = -√ص₁/√س₁

معادلة المماس (ص - ص₁)/(س - س₁) = -√ص₁/√س₁

- √ص₁ س + س₁ √ص₁ = √س₁ ص - √س₁ ص₁

√ص₁ س + √س₁ ص = س₁ √ص₁ + √س₁ ص₁

(بالقسمة على √س₁ √ص₁)

∴ س/√س₁ + ص/√ص₁ = √س₁ + √ص₁

∵ √س₁ + √ص₁ = √أ ∴ س/√س₁ + ص/√ص₁ = √أ

∴ الجزئين المقطوعين من محوري الإحداثيات هما

√ص₁ √أ ، √س₁ √أ

مجموعهم = √ص₁ √أ + √س₁ √أ

= √أ (√س₁ + √ص₁)

= √أ √أ = أ = مقدار ثابت

٦٩

معادلة المستقيم الموازي لمحور الصادات ويبعد ١ وحدة طولية في الاتجاه الموجب لمحور السينات هي س = ١

وبحل معادلة المنحنى ص² = س³ ، س = ١

∴ ص² = ١ ∴ ص = ± ١

∴ النقطتان هما (١ ، ١) ، (١ ، -١)

∵ ص² = س³ ∴ ٢ ص ءص/ءس = ٣ س²

∴ ءص/ءس = ٣ س² / ٢ ص

عند (١ ، ١) ∴ (ءص/ءس) عند (١ ، ١) = ٣/٢

∴ معادلة المماس (ص - ١)/(س - ١) = ٣/٢

أي أن ٣ س - ٢ ص - ١ = ٠

، ميل العمودي -٢/٣

∴ معادلة العمودي (ص - ١)/(س - ١) = -٢/٣

∴ ٢ س + ٣ ص - ٥ = ٠

عند (١ ، -١) ∴ (ءص/ءس) عند (١ ، -١) = -٣/٢

معادلة المماس (ص + ١)/(س - ١) = -٣/٢

∴ ٣ س + ٢ ص - ١ = ٠ ، ميل العمودي = ٢/٣

∴ المنحنيان يتماسان عند النقطة (-١ ، ٢) وتكون معادلة العمودي عندئذ

ص - ٢ = ١/٢ (س + ١)

∴ معادلة العمودي (ص - ١)/(س - ١) = ٢/٣

أي أن ٢ س - ٣ ص - ٥ = ٠

٧٠

① (ب) ② (أ) ③ (جـ) ④ (جـ)

⑤ (جـ) ⑥ (ب) ⑦ (ب) ⑧ (جـ)

إرشادات لحل رقم **٧٠**

① ∵ ص = س³ - ٣ س²

∴ صَ = ٣ س² - ٦ س = ٣ س (س - ٢)

بدراسة إشارة صَ نجد أن

صَ تكون سالبة لكل س ∈]٠ ، ٢[

أي أن المماس يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات لكل س ∈]٠ ، ٢[

② ∵ هـ (س) = د (٢ - س) / (س - ٢)

∴ هـَ (س) = ...

، عند س = ٥

∴ هـَ (٥) = (-٣ دَ (-٣) - د (-٣)) / ٩

، من الرسم ∵ د (-٣) = ٣

، دَ (-٣) = ميل المماس للمنحنى = -١

∴ هـَ (٥) = (-٣ × -١ - ٣) / ٩ = صفر

③ ∵ ص = أ²/س ∴ صَ = -أ²/س²

∴ عند النقطة (س₁ ، ص₁) ∴ صَ = -أ²/س₁²

∴ معادلة المماس هي

ص - ص₁ = -أ²/س₁² (س - س₁)

... = ٣٦ أ

∴ المماس يقطع محوري الإحداثيات

④ نفرض أن المماس ص = س + حـ يمس المنحنى عند النقطة (أ ، ب)

⑤ ∵ العمودي على المنحنى يقطع من محوري الإحداثيات أجزاء متساوية في الطول

عند النقطة (أ ، ب)

∴ النقطة (١ ، ٥) ∴ ميل المماس = ٤

∴ معادلة المماس هي [illegible]

أي أن ٤ س − ص + ١ = ٠

أو أ = ٤ ومنها ص = ٢ ∴ النقطة (٤ ، ٢)

∴ ميل المماس = ٢

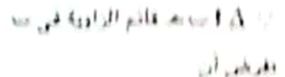
∴ معادلة المماس هي [illegible]

[illegible]

إجابات أسئلة [illegible]

① (ب)	② (أ)	③ (ب)
④ (ب)	⑤ (ج)	⑥ (ج)

[illegible]



[illegible]



(٢٦)

بفرض أن المسافة بين قمة السلم والأرض = ص

، المسافة بين طرفه السفلى والحائط = س

∴ $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = (\text{٢,٦})^2$

بالاشتقاق بالنسبة إلى الزمن

$\text{٢ س} \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} + \text{٢ ص} \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \text{٠}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \frac{\text{-س}}{\text{ص}} \times \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

، ∵ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = \text{٤}$ متر/د

، عند س = ١

∴ ص = $\sqrt{(\text{٢,٦})^2 - \text{١}^2} = \text{٢,٤}$ متر

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \frac{\text{-١}}{\text{٢,٤}} \times \text{٤} = \frac{\text{-٥}}{\text{٣}}$ متر/د

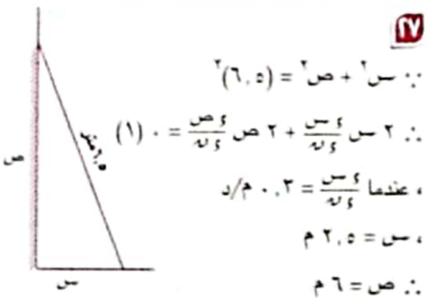
، ∵ جا θ = $\frac{\text{ص}}{\text{٢,٦}}$ ∴ ص = ٢,٦ جا θ

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \text{٢,٦}$ جتا θ $\frac{\text{ء}\theta}{\text{ءن}}$

∴ $\frac{\text{-٥}}{\text{٣}} = \text{٢,٦} \times \frac{\text{١}}{\text{٢,٦}} \times \frac{\text{ء}\theta}{\text{ءن}}$

∴ $\frac{\text{ء}\theta}{\text{ءن}} = \left(\frac{\text{-٥}}{\text{٣}}\right)$ ء/د

(٢٧)



∵ $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = (\text{٦,٥})^2$

∴ $\text{٢ س} \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} + \text{٢ ص} \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \text{٠}$ (١)

، عندما $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = \text{٠,٣}$ م/د

، س = ٢,٥ م

∴ ص = ٦ م

ومن (١) : $\text{٢} \times \text{٢,٥} \times \text{٠,٣} + \text{٢} \times \text{٦} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \text{٠}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = -\frac{\text{١}}{\text{٨}}$ م/د

∴ معدل انخفاض الطرف العلوى للسلم = $\frac{\text{١}}{\text{٨}}$ م/د

وعندما يتحرك الطرف العلوى والسفلى بنفس المعدل

أى : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \frac{\text{-ءس}}{\text{ءن}}$

∴ $\text{٢ س} \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} - \text{٢ ص} \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = \text{٠}$

∴ س - ص = ٠ أى : س = ص

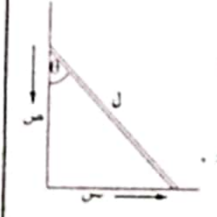
أى : $\text{ص}^2 + \text{ص}^2 = (\text{٦,٥})^2$

∴ $\text{٢ ص}^2 = (\text{٦,٥})^2$

∴ ص = $\frac{\text{١٣}\sqrt{\text{٢}}}{\text{٤}}$

أى بعد الطرف العلوى للسلم عن الأرضى = $\frac{\text{١٣}\sqrt{\text{٢}}}{\text{٤}}$ م

(٢٨)



بفرض طول السلم = ل وحدة

$\text{س}^2 + \text{ص}^2 = \text{ل}^2$

$\text{٢ س} \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} + \text{٢ ص} \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \text{٠}$

$\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = \frac{\text{-ص}}{\text{س}} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$



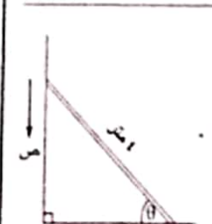
عندما قتا θ = $\frac{\text{٥}}{\text{٤}}$

س = ل جا θ ، ص = ل جتا θ

∴ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = \frac{\text{-٣}}{\text{٤}} \times$ - ك

= $\frac{\text{٣ ك}}{\text{٤}}$ وحدة/ث (ك > ٠)

(٢٩)



$\text{س}^2 + \text{ص}^2 = \text{٤}^2$

$\text{٢ س} \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} + \text{٢ ص} \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \text{٠}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \frac{\text{-س}}{\text{ص}} \times \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

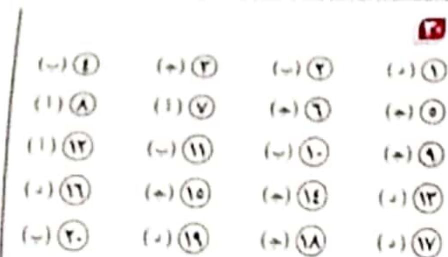
عند θ = $\frac{\pi}{\text{٣}}$

فإن س = ٢٠٠ سم ، ص = ٢٠٠ $\sqrt{\text{٣}}$ سم

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \frac{\text{-٢٠٠}}{\text{٢٠٠}\sqrt{\text{٣}}} \times \text{٢٠} = \frac{\text{-٢٠}\sqrt{\text{٣}}}{\text{٣}}$ سم/ث

∴ معدل هبوط الطرف العلوى للسطح = $\frac{\text{٢٠}\sqrt{\text{٣}}}{\text{٣}}$ سم/ث

(٣٠)



① (ء)	② (ب)	③ (ﺟ)	④ (ب)
⑤ (ﺟ)	⑥ (ﺟ)	⑦ (أ)	⑧ (أ)
⑨ (ﺟ)	⑩ (ب)	⑪ (ب)	⑫ (أ)
⑬ (ء)	⑭ (ﺟ)	⑮ (ﺟ)	⑯ (ء)
⑰ (ء)	⑱ (ﺟ)	⑲ (ء)	⑳ (ب)
㉑ (أ)	㉒ (ب)		

(٣١)

∵ الطول يتناقص بمعدل ١ سم/د

∴ بعد ن ثانية يصبح الطول = ١٢ - ١ × ن = ١٢ - ن

، ∵ العرض يتزايد بمعدل $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ سم/د

∴ بعد ثانية يصبح العرض = ٥ + $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ ن

∴ المساحة (م) = (١٢ - ن) $\left(\text{٥} + \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{ن}\right)$

وعندما يكون الشكل مربعًا

∴ ١٢ - ن = ٥ + $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ ن ∴ ٧ = ١ $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ ن

∴ ن = $\frac{\text{١٤}}{\text{٣}}$ ث

$\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}$ (١٢ - ن) - $\left(\text{٥} + \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{ن}\right)$

∴ ٦ - $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ ن - ٥ - $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ ن = ٠ ∴ ن = ١ ث

وعندها م = (١٢ - ١) × $\left(\text{٥} + \frac{\text{١}}{\text{٢}}\right)$ = ٦٠,٥ سم^2

(٣٢)

نفرض أن العرض = س ∴ الطول = $\frac{\text{٢٤}}{\text{س}}$

∴ ① محيط المستطيل (ح) = ٢ $\left(\text{س} + \frac{\text{٢٤}}{\text{س}}\right)$

= ٢ س + $\frac{\text{٤٨}}{\text{س}}$

∴ $\frac{\text{ءح}}{\text{ءن}} = \text{٢} \times \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} - \frac{\text{٤٨}}{\text{س}^2} \times \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

∴ $\left(\frac{\text{ءح}}{\text{ءن}}\right)_{\text{س = ٤}} = \text{٢} \times \text{١} - \frac{\text{٤٨}}{\text{١٦}} \times \text{١}$

= -١ سم/ث

② عندما $\frac{\text{ءح}}{\text{ءن}} = \text{٠}$

∴ $\text{٢} \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} - \frac{\text{٤٨}}{\text{س}^2} \times \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = \text{٠}$

∴ $\text{٢} = \frac{\text{٤٨}}{\text{س}^2}$ ∴ $\text{س}^2 = \text{٢٤}$

∴ س = ٢ $\sqrt{\text{٦}}$ سم ومنها ص = ٢ $\sqrt{\text{٦}}$ سم

(٣٣)

$\frac{\text{ءل}}{\text{ءن}} = \text{٦}$ سم/د

$\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}} = -\text{٢}$ سم/د

م = ل ع = ١٢٠٠ (١)

صفر = ل $\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}$ + ع $\frac{\text{ءل}}{\text{ءن}}$

∴ ل × -٢ + ع × ٦ = ٠ ∴ ل = ٣ ع

بالتعويض فى (١) :

(٣ ع) × ع = ١٢٠٠ منها ٣ ع^2 = ١٢٠٠

ع = ٢٠ سم ∴ ل = ٦٠ سم

$\text{و}^2 = \text{ل}^2 + \text{ع}^2$

$\text{٢ و} \frac{\text{ءو}}{\text{ءن}} = \text{٢ ل} \frac{\text{ءل}}{\text{ءن}} + \text{٢ ع} \frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}$

$\text{و} \frac{\text{ءو}}{\text{ءن}} = \text{ل} \frac{\text{ءل}}{\text{ءن}} + \text{ع} \frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}$

$\sqrt{\text{٢٠}^2 + \text{٦٠}^2} \times \frac{\text{ءو}}{\text{ءن}} = \text{٦٠} \times \text{٦} + \text{٢٠} \times -\text{٢}$

$\frac{\text{ءو}}{\text{ءن}} = \frac{\text{٨}\sqrt{\text{١٠}}}{\text{٥}}$ سم/د

∴ القطر يتزايد بمعدل $\frac{\text{٨}\sqrt{\text{١٠}}}{\text{٥}}$ سم/د

(٣٤)

بفرض أن الارتفاع = ع ، طول قاعدة المثلث = ٣ ع

∴ المساحة (م) = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ × ٣ ع × ع = $\frac{\text{٣}}{\text{٢}} \text{ع}^2$

∴ $\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = \text{٣ ع} \frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}$ وعندما ع = ٩ سم

∴ ٠,٢٧ = ٣ × ٩ × $\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}$

∴ $\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}$ = ٠,٠١ سم/ث

∵ بفرض أن أبعاد متوازي المستطيلات عند أي لحظة زمنية هي

(٦ + ن) ، (٦ + ن) ، (٢٤ − ٢ن)

∴ الحجم (ح) = $(٦ + ن)^٢ (٢٤ − ٢ن)$

∴ $\frac{دح}{دن}$ = ٢ (٦ + ن)(٢٤ − ٢ن) + $(٦ + ن)^٢$ (−٢)

= ٢ (٦ + ن)(٢٤ − ٢ن − ٦ − ن)

= ٢ (٦ + ن)(١٨ − ٣ن)

وعندما $\frac{دح}{دن}$ = صفر

∴ ١٨ − ٣ن = ٠ ∴ ن = ٦ دقيقة

بفرض أن طول ضلع القاعدة = ارتفاع الهرم = س

∴ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ $س^٣$ $سم^٣$

∴ $\frac{دح}{دن}$ = $س^٢$ $\frac{دس}{دن}$

∴ ١ = $س^٢$ × ٠,٠١

$س^٢$ = ١٠٠ ∴ س = ١٠ سم

∴ طول ضلع قاعدة الهرم = ١٠ سم

نفرض أبعاد المنشور هي س ، س ، ص

∴ الحجم (ح) = $س^٢$ × ص

∴ $\frac{دح}{دن}$ = $س^٢$ $\frac{دص}{دن}$ + ٢ ص س $\frac{دس}{دن}$

= $(٤)^٢$ × −٤ + ٢ × ٨ × ٤ × ٢ = ٦٤ $سم^٣$/ث

∵ بفرض أن أبعاد المنشور عند أي لحظة هي

(٤ + ٢ن) ، (٤ + ٢ن) ، (٨ − ٤ن)

∴ الحجم (ح) = $(٤ + ٢ن)^٢ (٨ − ٤ن)$

∴ $\frac{دح}{دن}$ = ٤ (٤ + ٢ن)(٨ − ٤ن) + $(٤ + ٢ن)^٢$ (−٤)

= ٤ (٤ + ٢ن)(٨ − ٤ن − ٤ − ٢ن)

= ٤ (٤ + ٢ن)(٤ − ٦ن)

عندما $\frac{دح}{دن}$ = صفر ∴ ن = $\frac{٢}{٣}$ ث

مساحة الدائرة (م) = π $نق^٢$

∴ $\frac{دم}{دن}$ = ٢ π نق $\frac{دنق}{دن}$

∴ $\frac{دم}{دن}$ = ثابت وليكن ك

∴ $\frac{دنق}{دن}$ = $\frac{ك}{٢ π نق}$ (١)

∵ محيط الدائرة (ح) = ٢ π نق

∴ $\frac{دح}{دن}$ = ٢ π $\frac{دنق}{دن}$ ومن (١)

= ٢ π × $\frac{ك}{٢ π نق}$ = $\frac{ك}{نق}$

∴ $\frac{دح}{دن}$ ∝ $\frac{١}{نق}$

أي أن محيط الدائرة يتناسب عكسيا مع نق

∵ الغاز يتسرب بمعدل س ∴ $\frac{دح}{دن}$ = −س

∵ حجم الكرة (ح) = $\frac{٤}{٣}$ π $نق^٣$

∴ $\frac{دح}{دن}$ = ٤ π $نق^٢$ $\frac{دنق}{دن}$

∴ −س = ٤ π $نق^٢$ $\frac{دنق}{دن}$ ∴ $\frac{دنق}{دن}$ = $\frac{−س}{٤ π نق^٢}$

مساحة الكرة (م) = ٤ π $نق^٢$

∴ $\frac{دم}{دن}$ = ٨ π نق $\frac{دنق}{دن}$

∴ $\frac{دم}{دن}$ = ٨ π نق × $\frac{−س}{٤ π نق^٢}$ = $\frac{−٢س}{نق}$ $سم^٢$/ث

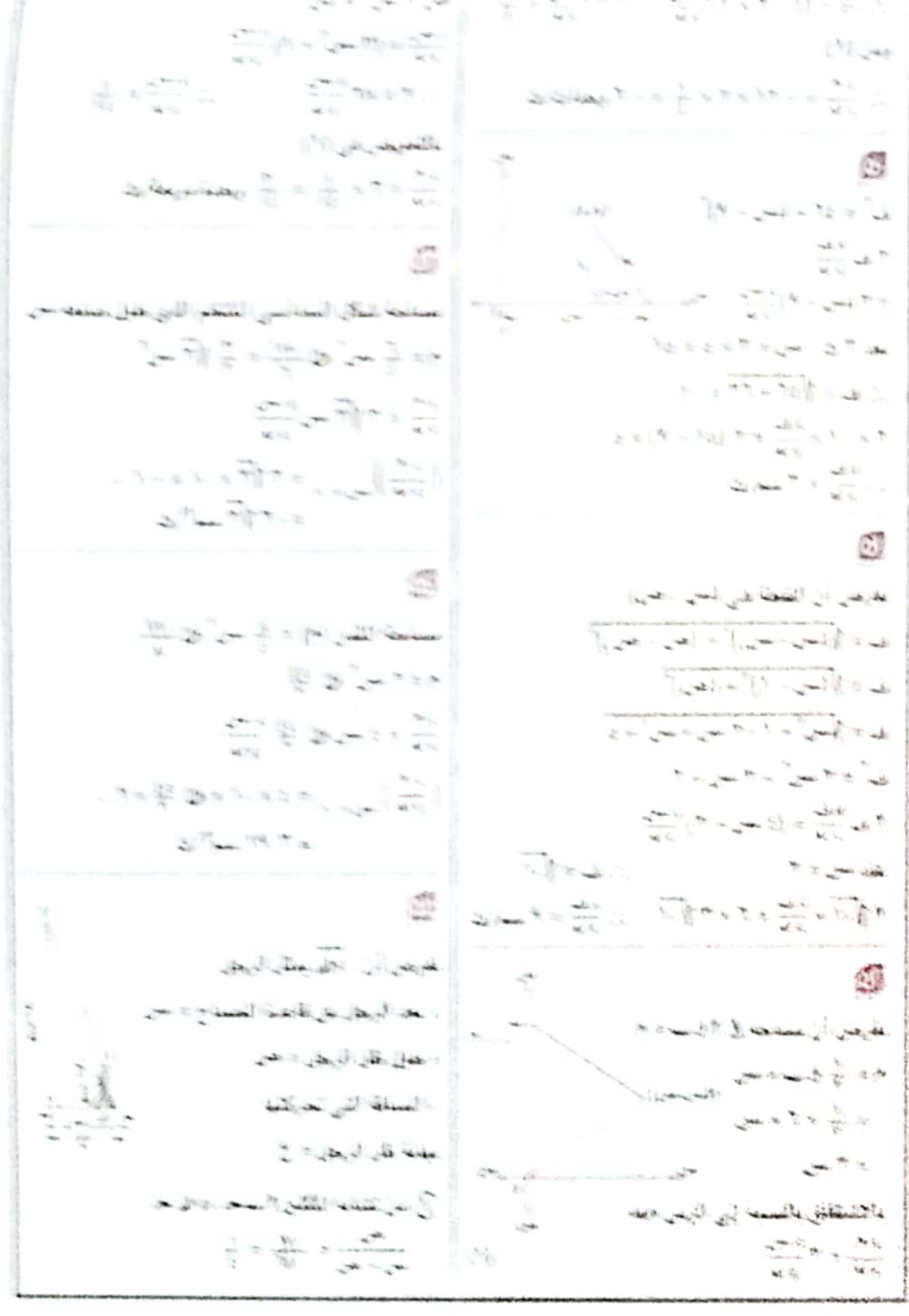
∴ معدل نقص المساحة = $\frac{٢س}{نق}$

∵ ميل المنحنى (م) = $\frac{دص}{دس}$ = ٤ − ٦ $س^٢$

∴ $\frac{دم}{دن}$ = −١٢ س $\frac{دس}{دن}$ (١)

∵ ص = ٤ س − ٢ $س^٣$

∴ $\frac{دص}{دن}$ = (٤ − ٦ $س^٢$) $\frac{دس}{دن}$



∴ $\frac{ء ح}{ء ن} = ٤ \pi نق^٢ \times \frac{ء نق}{ء ن}$

المساحة (م) = $٤ \pi نق^٢$

$\frac{ء م}{ء ن} = ٨ \pi نق \frac{ء نق}{ء ن}$

[illegible]

= ... سم^٢/ث

٤٥

① (ب) ② (ج)

③ أولاً: (أ) ثانياً: (ب) ④ (ب) ⑤ (أ)

⑥ (ب) ⑦ (ب) ⑧ (أ)

٤٦

∵ $ح = \frac{٤}{٣} \pi نق^٣$

∴ $\frac{ء ح}{ء ن} = ٤ \pi نق^٢ \times \frac{ء نق}{ء ن}$ (١)

∵ $ص = ٤ \pi نق^٢$

∴ $\frac{ء ص}{ء ن} = ٨ \pi نق \times \frac{ء نق}{ء ن}$ وبتربيع الطرفين

∴ $\left(\frac{ء ص}{ء ن}\right)^٢ = \left(٨ \pi نق \times \frac{ء نق}{ء ن}\right)^٢$ (٢)

بضرب (١) × $\frac{ء نق}{ء ن}$

∴ $\frac{ء ح}{ء ن} \times \frac{ء نق}{ء ن} = ٤ \pi نق^٢ \times \left(\frac{ء نق}{ء ن}\right)^٢$

بالتعويض من (٢)

∴ $\frac{ء ح}{ء ن} \times \frac{ء نق}{ء ن} = ٤ \pi نق^٢ \times \left(\frac{ء ص}{ء ن}\right)^٢ \times \frac{١}{٦٤ \pi^٢ نق^٢}$

∴ $\frac{ء ح}{ء ن} \times \frac{ء نق}{ء ن} = \frac{١}{١٦ \pi} \times \left(\frac{ء ص}{ء ن}\right)^٢$

، عند $\frac{ء ح}{ء ن} = \pi$ سم^٣/ث ، $\frac{ء ص}{ء ن} = ٢ \pi$ سم^٢/ث

∴ $\pi \times \frac{ء نق}{ء ن} = \frac{١}{١٦ \pi} \times ٤ \pi^٢$

∴ $ص = ٤ \pi نق^٢$ وبالتعويض من (٢)

∴ $ص = \frac{ء ح}{ء ن} = ... = \frac{١}{٤} \pi$ سم^٢

٤٤

نفرض أن الضغط = ض ، الحجم = ح

∴ ض × ح = ث ∴ $ض = \frac{ث}{ح}$

، عند ض = ... ، ح = ... سم^٣

∴ ث = ... (١)

وبالاشتقاق بالنسبة إلى ن

∴ $\frac{ء ض}{ء ن} \times ح + ض \times \frac{ء ح}{ء ن} = ٠$

من (١)

عندما يكون الحجم = ... سم^٣ فإن الضغط

= ... ث جم/سم^٢

∴ $\frac{ء ض}{ء ن} = ...$ ث جم/سم^٢/ث

٤٧

∵ جـ = ت × م وبالاشتقاق بالنسبة إلى ن

$\frac{ء جـ}{ء ن} = ت \frac{ء م}{ء ن} + م \frac{ء ت}{ء ن}$ (١)

$\frac{ء جـ}{ء ن} = ١$ فولت/ث ، $\frac{ء ت}{ء ن} = \frac{١}{٣}$ أمبير/ث

عند جـ = ١٢ فولت ، ت = ٢ أمبير

∴ $م = \frac{جـ}{ت} = \frac{١٢}{٢} = ٦$ أوم

بالتعويض في (١)

$١ = ٢ \times \frac{ء م}{ء ن} + ٦ \times \frac{١}{٣}$

∴ $\frac{ء م}{ء ن} = ...$ أوم/ث

ميل المستقيم ... = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

∴ قياس الزاوية التي يصنعها المستقيم ... مع الاتجاه الموجب لمحور السينات = ٣٠°

∵ ... ∴ ...

وبعد مرور ن دقيقة من تحرك النقطة ب تكون النقطة أ قد تحركت (ن + ١) دقيقة وبالتالي فإن النقطة ب تكون قد قطعت مسافة ٤ ن متر

، النقطة أ تكون قد قطعت مسافة ٤ (ن + ١) = ٤ ن + ٤ متر

ونفرض أن ف المسافة بين النقطتين أ ، ب بعد مرور ن دقيقة من تحرك ب

فإن: $ف^٢ = (أ ب)^٢ = ...$

∴ $ف^٢ = (٤ ن + ٤)^٢ + (٤ ن)^٢ ...$

∴ $ف^٢ = ...$ (١)

وبعد دقيقتين من تحرك النقطة ب

∴ $ف^٢ = ١٤٤ + ... = ١٤٤$

∴ ف = ١٢ متر

وباشتقاق العلاقة (١) بالنسبة إلى ن

∴ $٢ ف \frac{ء ف}{ء ن} = ...$

∴ $٢ \times ١٢ \times \frac{ء ف}{ء ن} = ١٢٠$

∴ $\frac{ء ف}{ء ن} = ٥$ متر/دقيقة

نفرض أن القطار الأول على بعد (أ ... كم) من (أ)

والقطار الثاني على بعد (... كم) من (أ)

والمسافة بين القطارين (ف) كم

∴ $ف^٢ = س^٢ + ص^٢$

∴ $٢ ف \frac{ء ف}{ء ن} = ٢ س \frac{ء س}{ء ن} + ٢ ص \frac{ء ص}{ء ن}$ (١)

، بعد الساعة الثالثة ظهراً

∴ س = ٣ × ٦٠ = ١٨٠ كم

، ص = ٣ × ٦٠ = ١٨٠ كم

∴ $ف = \sqrt{(١٨٠)^٢ + (١٨٠)^٢} = ١٨٠ \sqrt{٢}$ كم

من المعادلة (١)

$٢ \times ١٨٠ \sqrt{٢} \frac{ء ف}{ء ن} = ٢ (١٨٠)(٦٠) + ٢ (١٨٠)(٦٠)$

∴ $\frac{ء ف}{ء ن} = ٦٠ \sqrt{٢}$ كم/س

٤٨

نفرض أن ف البعد بين السفينتين بعد مرور ن ساعة من تحرك السفينة الثانية

من هندسة الشكل

$ف^٢ = (٢٠ ن)^٢ + (١٠٠ - ... ن)^٢$ (١)

∴ $٢ ف \frac{ء ف}{ء ن} = ...$

$= ٢ (٢٠ ن)(٢٠) + ٢ (...) (-١٠)$

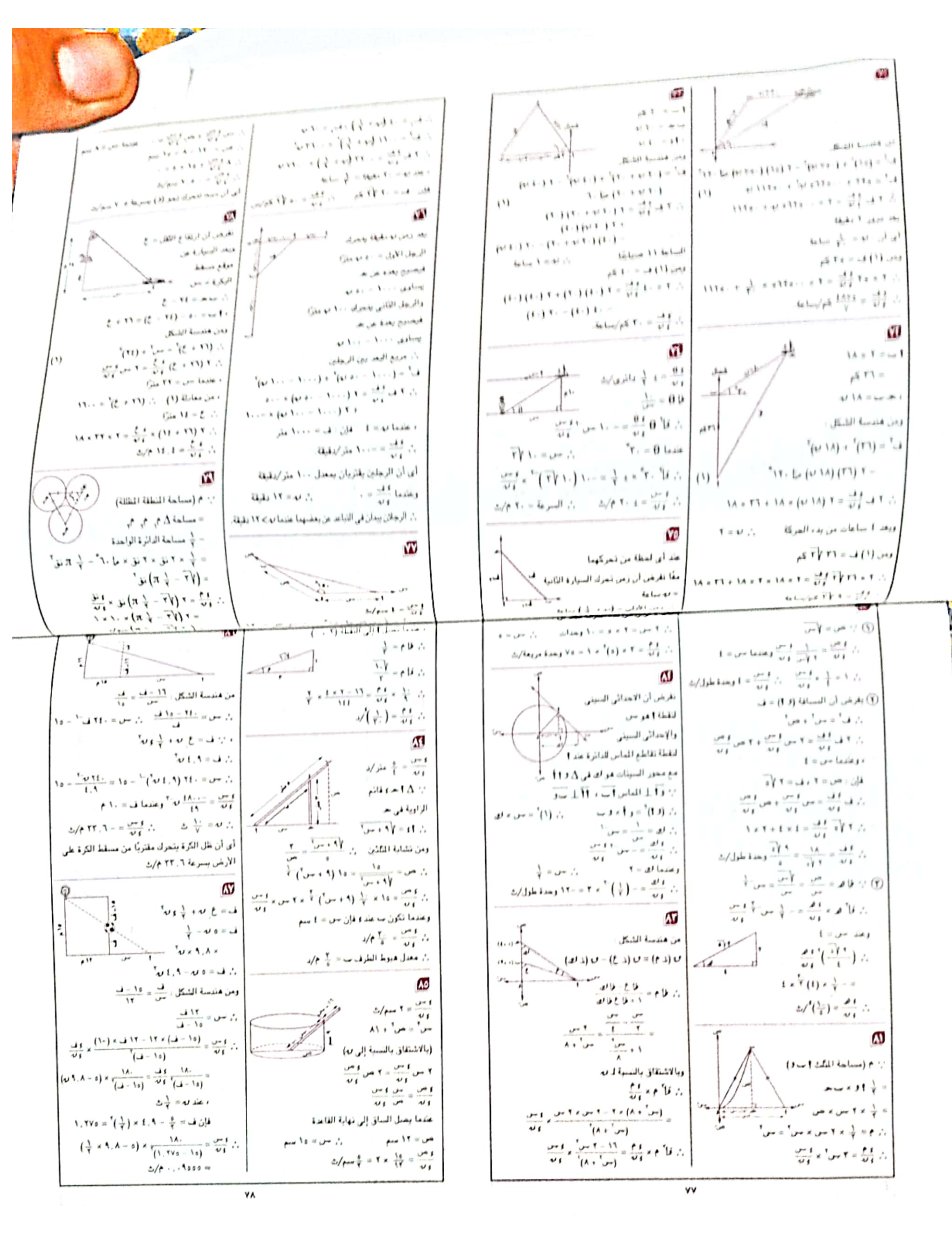
في الساعة العاشرة صباحاً ∴ ن = ١

ومن (١) ∴ ف = ٥٠ كم

∴ $٢ (٥٠) \frac{ء ف}{ء ن} = ٢ (٢٠)(٢٠) + ٢ (٤٠)(-١٠)$

∴ $\frac{ء ف}{ء ن} = ١٠$ كم/ساعة

∴ $\frac{ء ف}{ء ن} > ٠$ ∴ السفينتان تتباعدان



٨٨

(١) (ب) (٢) (جـ) (٣) (ب) (٤) (جـ) (٥) (ب)

إرشادات لحل رقم ٨٨

(١) بفرض أن $ل_١$ ، $ل_٢$ ، ..... ، $ل_ر$ هى أطول أضلاع المضلع ، ح هى محيط المضلع

$\therefore ح = ل_١ + ل_٢ + ... + ل_ر$

$\therefore \frac{ءح}{ءن} = \frac{ءل_١}{ءن} + \frac{ءل_٢}{ءن} + ... + \frac{ءل_ر}{ءن}$

، $\because \frac{ءل_١}{ءن} = \frac{ءل_٢}{ءن} = ... = \frac{ءل_ر}{ءن} = ٢$

$\therefore \frac{ءح}{ءن} = ٢م$

أى أن المحيط يزداد بمعدل (م ٢) سم/ث

(٢) بفرض أن $ح_١$ هو حجم الخزان الأصغر وارتفاع الماء به هو $ع_١$

، $ح_٢$ هو حجم الخزان الأكبر وارتفاع الماء به هو $ع_٢$

، $\because$ الحجم $= \pi$ نق^٢ ع

$\therefore ح_١ = \pi \times (٤)^٢ ع_١ = ١٦ \pi ع_١$

$\therefore \frac{ءح_١}{ءن} = ١٦ \pi \frac{ءع_١}{ءن}$

، $ح_٢ = \pi \times (٨)^٢ ع_٢ = ٦٤ \pi ع_٢$

$\therefore \frac{ءح_٢}{ءن} = ٦٤ \pi \frac{ءع_٢}{ءن}$

، $\because$ تدفق المياه فى الخزانان بنفس المعدل

أى أن $\frac{ءح_١}{ءن} = \frac{ءح_٢}{ءن}$

$\therefore ١٦ \pi \frac{ءع_١}{ءن} = ٦٤ \pi \frac{ءع_٢}{ءن}$

، $\because \frac{ءع_١}{ءن} = \frac{١}{٢}$ م/دقيقة

[illegible]

(٣) $\because$ حجم الاسطوانة (ح) = π نق^٢ ع

، $\because$ نق ثابتة

$\therefore \frac{ءح}{ءن} = \pi$ نق$^٢ \frac{ءع}{ءن}$ ، $\because \frac{ءح}{ءن}$ = ثابت

$\therefore \frac{ءع}{ءن}$ = ثابت $\therefore$ ع = ع + ثابت × ن

، $\because$ ع (الارتفاع عند البدء) = صفر

$\therefore$ ع = ثابت × ن

$\therefore$ العلاقة خطية بين ع ، ن وتمر بنقطة الأصل

$\therefore$ الشكل الصحيح هو (ب)

(٤) نفرض أن ارتفاع الماء = ل متر

، طول نصف قطر سطح الماء = نق

من هندسة الشكل نجد أن

نق^٢ + (٢ − ل)^٢ = ٤ (١)

بعد ٢ دقيقة من بداية صب الماء يكون

$ل = \frac{١}{٤} \times ٢ = \frac{١}{٢}$ متر

، نق^٢ + (١٫٥)^٢ = ٤

$\therefore$ نق = $\frac{\sqrt{٧}}{٢}$ متر

وباشتقاق المعادلة (١) بالنسبة للزمن

$\therefore$ ٢ نق $\frac{ءنق}{ءن}$ − ٢ (٢ − ل) $\frac{ءل}{ءن}$ = صفر

$\therefore ٢ \times \frac{\sqrt{٧}}{٢} \times \frac{ءنق}{ءن} - ٢ \times (٢ - \frac{١}{٢}) \times \frac{١}{٤}$ = صفر

$\therefore \frac{ءنق}{ءن} = \frac{٣}{٤\sqrt{٧}}$

، $\because$ مساحة سطح الماء (م) = π نق^٢

$\therefore \frac{ءم}{ءن} = ٢ \pi$ نق $\times \frac{ءنق}{ءن}$

[illegible]

(٥) $\because \overline{ءهـ} // \overline{أحـ}$

$\therefore \triangle ءهـ ب \sim \triangle أحـ ب$

$\therefore \frac{م(\triangle ءهـ ب)}{م(\triangle أحـ ب)} = \left(\frac{ب هـ}{ب حـ}\right)^٢$

وبفرض ب هـ = س

، م ($\triangle$ ءهـ ب) = م

$\therefore \frac{م}{\frac{١}{٢} \times ١٠ \times ١٢} = \frac{س^٢}{١٠٠}$ $\therefore$ م = ٠٫٦ س^٢

$\therefore \frac{ءم}{ءن} = ١٫٢ س \frac{ءس}{ءن}$

، عند س = ١

$\therefore \frac{ءم}{ءن} = ١٫٢ \times ١ \times \frac{١}{١٠} = ٠٫١٢$ سم^٢/ث

٨٩

بفرض أن شدة الإستضاءة = ض

$\therefore ض = \frac{ك}{ف^٢}$

$\because (١٠٠)^٢ + س^٢ = ف^٢$

$\therefore ض = ك ف^{-٢}$

$ض = ك (١٠٠٠٠ + س^٢)^{-١}$

$\frac{ءض}{ءن} = - ك (١٠٠٠٠ + س^٢)^{-٢} (٢ س) \times \frac{ءس}{ءن}$

وعند س = ١٠٠ م

$\therefore \frac{ءض_١}{ءن} = - ك \times ٥ \times ١٠^{-٧} \times \frac{ءس}{ءن}$

، وعند س = ٢٠٠ م

$\frac{ءض_٢}{ءن} = - ك \times ١٫٦ \times ١٠^{-٧} \times \frac{ءس}{ءن}$ وبالقسمة

$\therefore \frac{ءض_١}{ءن} \div \frac{ءض_٢}{ءن} = \frac{٥}{١٫٦} = \frac{٢٥}{٨}$

٩٠

$\frac{ءع}{ءن} = -\frac{١}{٢}$ سم/ث

من هندسة الشكل

[illegible]

$\therefore$ س = [illegible]

مساحة شبه المنحرف (م) = [illegible]

[illegible]

$\therefore \frac{ءم}{ءن}$ = [illegible]

[illegible] سم^٢/ث

٩١

بفرض أن ء ب = س

$\therefore$ مساحة المستطيل (م) = س (١٦ − ٢ س)

$\therefore$ م = ١٦ س − ٢ س^٢

$\therefore \frac{ءم}{ءن} = (١٦ - ٤ س) \frac{ءس}{ءن}$

وعندما $\frac{ءس}{ءن} = \frac{١}{٤}$ ، س = ٣ سم

$\therefore \frac{ءم}{ءن} = (١٦ - ٤ \times ٣) \times \frac{١}{٤} = ١$ سم^٢/ث

، عندما $\frac{ءم}{ءن}$ = صفر $\therefore$ ١٦ − ٤ س = صفر

$\therefore$ س = ٤ سم

$\therefore$ مساحة المستطيل = ١٦ × ٤ − ٢ × ٤^٢ = ٣٢ سم^٢

٩٢

معدل زيادة حجم المخروط (ح)

= ٤٫٤ − ٣٫٢ = ١٫٢ سم^٣/ث

، حجم المخروط (ح) = $\frac{١}{٣} \pi$ نق^٢ ع

ومن هندسة الشكل

[illegible] $\therefore$ نق = $\frac{١}{٤}$ ع

$\therefore ح = \frac{١}{٣} \pi (\frac{١}{٤} ع)^٢ \times ع$ ، $ح = \frac{\pi}{٤٨} ع^٣$

$\therefore \frac{ءح}{ءن} = \frac{\pi}{١٦} ع^٢ \frac{ءع}{ءن}$

٩٣

حجم المخروط (ح) = $\frac{١}{٣} \pi$ نق^٢ ع

، ومن هندسة الشكل

$\frac{نق}{٨٠} = \frac{ع}{١٦٠}$

$\therefore$ نق = $\frac{١}{٢}$ ع

$\therefore$ الحجم (ح) = $\frac{١}{٣} \pi (\frac{١}{٢} ع)^٢$ ع

$\therefore ح = \frac{\pi}{١٢} ع^٣$ $\therefore \frac{ءح}{ءن} = \frac{\pi}{٤} ع^٢ \frac{ءع}{ءن}$

، حجم الماء فى الاسطوانة = π نق^٢ ع$_١$ = π (٥٠)^٢ ع$_١$

$\therefore \frac{ءح}{ءن} = ٢٥٠٠ \pi \frac{ءع_١}{ءن}$

، $\because$ القيمة العددية لـ $\frac{ءح}{ءن}$ للمخروط = القيمة العددية لـ $\frac{ءح}{ءن}$ للاسطوانة وكذلك $\frac{ءع}{ءن}$ ، $\frac{ءع_١}{ءن}$

$\therefore \frac{\pi}{٤} ع^٢ \frac{ءع}{ءن} = ٢٥٠٠ \pi \frac{ءع_١}{ءن}$

$\therefore$ ع = ١٠٠ سم

٩٤

أبعاد متوازى المستطيلات عند أى لحظة

هى ٣ + ٢ ن ، ٤ + ن ، ١٢ − ٣ ن

$\therefore$ حجم متوازى المستطيلات فى أى لحظة

ح = (٣ + ٢ ن) (٤ + ن) (١٢ − ٣ ن)

= ١٤٤ + ٩٦ ن − ٩ ن^٢ − ٦ ن^٣

$\therefore \frac{ءح}{ءن}$ = ٩٦ − ١٨ ن − ١٨ ن^٢

$\left(\frac{ءح}{ءن}\right)_{ن = ٢}$ = −١٢ سم^٣/ث

إذا كان قطر متوازى المستطيلات = ل

$\therefore$ ل^٢ = (٣ + ٢ ن)^٢ + (٤ + ن)^٢ + (١٢ − ٣ ن)^٢

٢ ل $\frac{ءل}{ءن}$ = ٢ (٣ + ٢ ن) × ٢ + ٢ (٤ + ن)

+ ٢ (١٢ − ٣ ن) × −٣

عند ن = ٢ فإن ل = ١١

$\left(\frac{ءل}{ءن}\right)_{ن = ٢} = \frac{٧ \times ٢ + ٦ + ٦ \times -٣٠}{١١}$

= $\frac{٢}{١١}$ سم/ث

٩٥

$\frac{ءس}{ءن}$ = ٣ م/د

$\frac{ءص}{ءن}$ = ٦ م/د

ومن هندسة الشكل

ل^٢ = س^٢ + ص^٢ + (١٢)^٢ (١)

$\because$ ٢ ل $\frac{ءل}{ءن}$ = ٢ س $\frac{ءس}{ءن}$ + ٢ ص $\frac{ءص}{ءن}$

بعد ٦ دقائق : س = ٣ × ٦ = ١٨ م

، ص = ٦ × ٦ = ٣٦ م ومن (١) $\therefore$ ل = ٤٢ م

$\therefore$ ٢ × ٤٢ × $\frac{ءل}{ءن}$ = ٢ × ١٨ × ٣ + ٢ × ٣٦ × ٦

$\therefore \frac{ءل}{ءن} = \frac{٤٥}{٧}$ م/د

٩٦

$\frac{ءص}{ءن}$ = ١٥٠ م/ث

$\frac{ءس}{ءن}$ = ٧٥ م/ث

من هندسة الشكل :

ف^٢ = (٢٠٠٠)^٢ + س^٢ + ص^٢ (١)

$\therefore$ ٢ ف $\frac{ءف}{ءن}$ = ٢ س $\frac{ءس}{ءن}$ + ٢ ص $\frac{ءص}{ءن}$

بعد ٤٠ ث

ص = ٤٠ × ١٥٠ = ٦٠٠٠ م

س = ٤٠ × ٧٥ = ٣٠٠٠ م

ومن (١) ف = ٧٠٠٠ م

$\therefore$ ٢ × ٧٠٠٠ × $\frac{ءف}{ءن}$ = ٢ × ٣٠٠٠ × ٧٥

+ ٢ × ٦٠٠٠ × ١٥٠

$\therefore \frac{ءف}{ءن} = ١٦٠ \frac{٥}{٧}$ م/ث

الوحدة 2

إجابات تمارين

تفاضل وتكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية

إجابات تمارين المحاكاة الثانوية العربية

إجابات تمارين 6

⑥ $\lim_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{س}$

⑦ $\lim_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{س}$ …

⑧ $\lim_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س + 1}\right)^{س}$

بفرض أن : ص $= \frac{1}{س + 1}$ ومنها س $= \frac{1}{ص} - 1$

في حالة س ⟵ ∞ ∴ ص ⟵ صفر

⑨ $\lim_{س \to \infty} \left(1 + \frac{2}{س}\right)^{س}$

بفرض أن : ص $= \frac{2}{س}$ ومنها س $= \frac{2}{ص}$

في حالة س ⟵ ∞ ∴ ص ⟵ ٠

⑩ …

بفرض أن : ص $= \frac{1}{س}$ ومنها س $= \frac{1}{ص}$

في حالة س ⟵ ∞ ∴ ص ⟵ ٠

[illegible]

٤

في حالة ن ⟵ ∞ ∴ م ⟵ ٠

∴ $\lim_{م \to 0} \frac{لو_هـ (1 + م)}{م} = 1$

٥

① (أ)	② (جـ)	③ (ب)	④ (ب)	⑤ (ب)
⑥ (جـ)	⑦ (ب)	⑧ (جـ)	⑨ (أ)	⑩ (جـ)
⑪ (جـ)	⑫ (ب)	⑬ (ب)	⑭ (جـ)	⑮ (أ)
⑯ (أ)	⑰ (جـ)	⑱ (أ)	⑲ (ب)	⑳ (أ)
㉑ (أ)				

٦

① $\lim_{س \to 1} \frac{لو س}{س - 1}$

بفرض أن : س − ١ = ص ومنها س = ص + ١

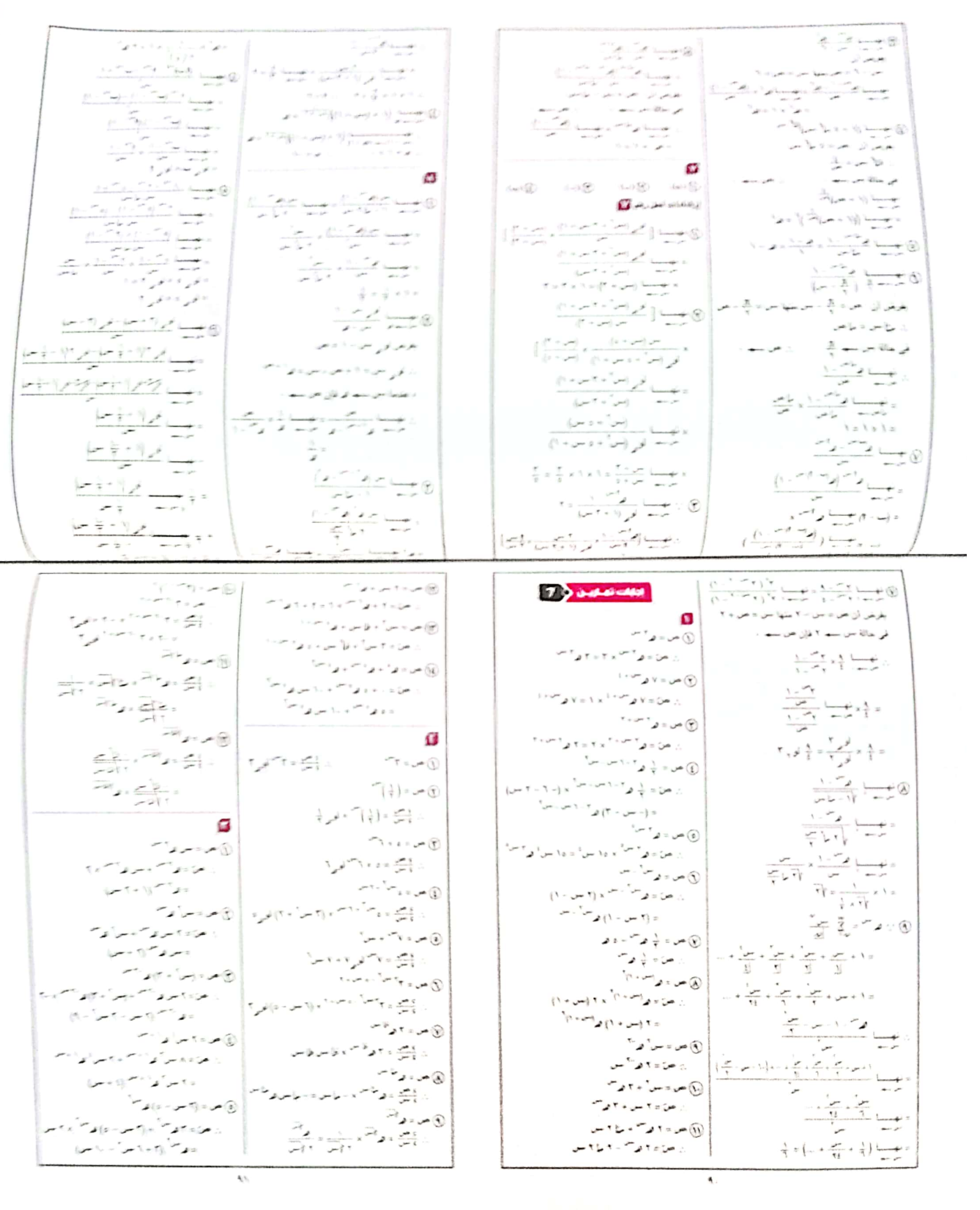
في حالة س ⟵ ١ ∴ ص ⟵ ٠

∴ $\lim_{ص \to 0} \frac{لو (ص + 1)}{ص} = لو هـ$

② بفرض أن : ص = ظا² س

[illegible]

١ + س ١٤



إجابات تمارين 7

(١٢) $\text{ص} = \text{٢ هـ}^{\text{٣س−٢}} - \text{٥ لو}_{\text{٢}} \frac{\text{س}}{\text{٥}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٦ هـ}^{\text{٣س−٢}} - \frac{\text{٥} \times \frac{\text{١}}{\text{٥}}}{\frac{\text{س}}{\text{٥}}} \text{ لو}_{\text{٢}}\text{ هـ}$

$= \text{٦ هـ}^{\text{٣س−٢}} - \frac{\text{٥ لو}_{\text{٢}}\text{ هـ}}{\text{س}}$

(١٣) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}} \text{ س}^{\text{٢}} - \text{هـ}^{\frac{\text{١}}{\text{٤}}\text{س}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{٢ س}}{\text{س}^{\text{٢}}} - \frac{\text{١}}{\text{٤}} \text{ هـ}^{\frac{\text{١}}{\text{٤}}\text{س}}$

$= \frac{\text{٢}}{\text{س}} - \frac{\text{١}}{\text{٤}} \text{ هـ}^{\frac{\text{١}}{\text{٤}}\text{س}}$

(١٤) $\text{ص} = \text{لو } (\text{٢ س} - \text{٣})^{\text{٢}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{٢ } (\text{٢ س} - \text{٣}) \times \text{٢}}{(\text{٢ س} - \text{٣})^{\text{٢}}} \text{ لو هـ}$

$= \frac{\text{٤ لو هـ}}{(\text{٢ س} - \text{٣})}$

(١٥) $\text{ص} = \text{٢ جتا س} - \text{هـ}^{\text{س}} - \frac{\text{١}}{\text{٢}} \text{ لو}_{\text{هـ}} \text{ س}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{٢ جا س} - \text{هـ}^{\text{س}} - \frac{\text{١}}{\text{٢ س}}$

(١٦) $\text{ص} = \text{٢}^{\text{٣س}} + \text{٣ لو}_{\text{هـ}} \text{ س} - \text{٢٠٢١}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٣ ٢}^{\text{٣س}} \text{ لو}_{\text{هـ}} \text{ ٢} + \frac{\text{٣}}{\text{س}}$

(١٧) $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{س} + \text{٧}} = \text{لو}_{\text{هـ}} \text{ س}^{\text{٢}} - \text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س} + \text{٧})$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{٢ س}}{\text{س}^{\text{٢}}} - \frac{\text{١}}{\text{س} + \text{٧}} = \frac{\text{٢}}{\text{س}} - \frac{\text{١}}{\text{س} + \text{٧}}$

(١٨) $\text{ص} = \text{لو} \left(\frac{\text{هـ}^{\text{س}^{\text{٢}}}}{\text{س}^{\text{٢}}}\right) = \text{لو هـ}^{\text{س}^{\text{٢}}} - \text{لو س}^{\text{٢}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{هـ}^{\text{س}^{\text{٢}}} \times \text{٢ س}}{\text{هـ}^{\text{س}^{\text{٢}}}} \text{ لو هـ} - \frac{\text{٢ س}}{\text{س}^{\text{٢}}} \text{ لو هـ}$

$= \left(\text{٢ س} - \frac{\text{٢}}{\text{س}}\right) \text{ لو هـ}$

٦

(١) $\text{ص} = \text{س لو}_{\text{هـ}} \text{ س}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{لو}_{\text{هـ}} \text{ س} + \text{س} \times \frac{\text{١}}{\text{س}} = \text{لو}_{\text{هـ}} \text{ س} + \text{١}$

(٢) $\text{ص} = \text{س}^{\text{٢}} \text{ لو}_{\text{هـ}} \text{ س}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٢ س لو}_{\text{هـ}} \text{ س} + \text{س}^{\text{٢}} \times \frac{\text{١}}{\text{س}}$

$= \text{٢ س لو}_{\text{هـ}} \text{ س} + \text{س}$

$= \text{س } (\text{٢ لو}_{\text{هـ}} \text{ س} + \text{١})$

(٣) $\text{ص} = \text{س لو}_{\text{هـ}} \text{ س}^{\text{٢}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{لو}_{\text{هـ}} \text{ س}^{\text{٢}} + \text{س} \times \frac{\text{٢ س}}{\text{س}^{\text{٢}}}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}} \text{ س}^{\text{٢}} + \text{٢}$

(٤) $\text{ص} = (\text{٢ س}^{\text{٥}} - \text{٣}) \text{ لو}_{\text{هـ}} \text{ س}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{١٠ س}^{\text{٤}} \text{ لو}_{\text{هـ}} \text{ س} + (\text{٢ س}^{\text{٥}} - \text{٣}) \times \frac{\text{١}}{\text{س}}$

$= \text{١٠ س}^{\text{٤}} \text{ لو}_{\text{هـ}} \text{ س} + \text{٢ س}^{\text{٤}} - \frac{\text{٣}}{\text{س}}$

(٥) $\text{ص} = (\text{٣} + \text{س}) \text{ لو}_{\text{هـ}} \text{ س}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{لو}_{\text{هـ}} \text{ س} + (\text{٣} + \text{س}) \times \frac{\text{١}}{\text{س}}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}} \text{ س} + \frac{\text{٣}}{\text{س}} + \text{١}$

(٦) $\text{ص} = \text{٢ س}^{\text{٢}} \text{ لو}_{\text{هـ}} \text{ س}^{\text{٣}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٤ س لو}_{\text{هـ}} \text{ س}^{\text{٣}} + \text{٢ س}^{\text{٢}} \times \frac{\text{٣ س}^{\text{٢}}}{\text{س}^{\text{٣}}}$

$= \text{٤ س لو}_{\text{هـ}} \text{ س}^{\text{٣}} + \text{٦ س}$

(٧) $\text{ص} = \text{٢ س} + \text{هـ}^{\text{س}} \text{ لو}_{\text{هـ}} \text{ س}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٢} + \text{هـ}^{\text{س}} \text{ لو}_{\text{هـ}} \text{ س} + \text{هـ}^{\text{س}} \times \frac{\text{١}}{\text{س}}$

$= \text{٢} + \text{هـ}^{\text{س}} \text{ لو}_{\text{هـ}} \text{ س} + \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}}$

$= \text{٢} + \text{هـ}^{\text{س}} \left(\text{لو}_{\text{هـ}} \text{ س} + \frac{\text{١}}{\text{س}}\right)$

(٨) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} \text{ لو}_{\text{هـ}} (\text{س}^{\text{٢}} + \text{١})$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{هـ}^{\text{س}} \text{ لو}_{\text{هـ}} (\text{س}^{\text{٢}} + \text{١}) + \text{هـ}^{\text{س}} \frac{\text{٢ س}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{١}}$

$= \text{هـ}^{\text{س}} \left(\text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س}^{\text{٢}} + \text{١}) + \frac{\text{٢ س}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{١}}\right)$

(٩) $\text{ص} = \text{٥} + \text{٤ جتا س لو}_{\text{هـ}} \text{ س}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{٤ جا س لو}_{\text{هـ}} \text{ س} + \text{٤ جتا س} \times \frac{\text{١}}{\text{س}}$

$= -\text{٤ جا س لو}_{\text{هـ}} \text{ س} + \frac{\text{٤ جتا س}}{\text{س}}$

(١٠) $\text{ص} = (\text{لو س})^{\text{٣}} + \sqrt{\text{س}} \text{ لو س}^{\text{٤}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٣ } (\text{لو س})^{\text{٢}} \times \frac{\text{١}}{\text{س}} \text{ لو}_{\text{١٠}} \text{ هـ}$

$+ \frac{\text{١}}{\text{٢}\sqrt{\text{س}}} \text{ لو س}^{\text{٤}} + \sqrt{\text{س}} \times \frac{\text{٤ س}^{\text{٣}}}{\text{س}^{\text{٤}}} \text{ لو}_{\text{١٠}} \text{ هـ}$

$= \frac{\text{٣}}{\text{س}} (\text{لو س})^{\text{٢}} \text{ لو}_{\text{١٠}} \text{ هـ}$

$+ \frac{\text{لو س}^{\text{٤}}}{\text{٢}\sqrt{\text{س}}} + \frac{\text{٤}}{\sqrt{\text{س}}} \text{ لو}_{\text{١٠}} \text{ هـ}$

(١١) $\text{ص} = \frac{\text{س}}{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{ س}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{ س } (\text{١}) - \text{س} \times \frac{\text{١}}{\text{س}}}{(\text{لو}_{\text{هـ}} \text{ س})^{\text{٢}}}$

$= \frac{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{ س} - \text{١}}{(\text{لو}_{\text{هـ}} \text{ س})^{\text{٢}}}$

(١٢) $\text{ص} = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}} (\text{٥ س})}{\text{س} + \text{١}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{(\text{س} + \text{١}) \frac{\text{٥}}{\text{٥ س}} - \text{لو}_{\text{هـ}} \text{ ٥ س } (\text{١})}{(\text{س} + \text{١})^{\text{٢}}}$

$= \frac{\text{س} + \text{١} - \text{س لو}_{\text{هـ}} \text{ ٥ س}}{\text{س } (\text{س} + \text{١})^{\text{٢}}}$

(١٣) $\text{ص} = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{ س}}{\text{جا س}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{جا س} \times \frac{\text{١}}{\text{س}} - \text{لو}_{\text{هـ}} \text{ س جتا س}}{(\text{جا س})^{\text{٢}}}$

$= \frac{\text{جا س} - \text{س لو}_{\text{هـ}} \text{ س جتا س}}{\text{س جا}^{\text{٢}} \text{ س}}$

(١٤) $\text{ص} = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{ س}}{\text{ظا س}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ظا س } \left(\frac{\text{١}}{\text{س}}\right) - \text{لو}_{\text{هـ}} \text{ س قا}^{\text{٢}} \text{ س}}{\text{ظا}^{\text{٢}} \text{ س}}$

$= \frac{\text{ظا س} - \text{س لو}_{\text{هـ}} \text{ س قا}^{\text{٢}} \text{ س}}{\text{س ظا}^{\text{٢}} \text{ س}}$

(١٥) $\text{ص} = \frac{\text{هـ}^{\text{٢س}}}{\text{لو س}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{لو س} \times \text{هـ}^{\text{٢س}} \times \text{٢} - \text{هـ}^{\text{٢س}} \times \frac{\text{١}}{\text{س}} \text{ لو هـ}}{(\text{لو س})^{\text{٢}}}$

$= \frac{\text{هـ}^{\text{٢س}} \left(\text{٢ لو س} - \frac{\text{١}}{\text{س}} \text{ لو هـ}\right)}{(\text{لو س})^{\text{٢}}}$

(١٦) $\text{ص} = \frac{\text{لو س}}{\text{١} + \text{لو س}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{(\text{١} + \text{لو س}) \times \frac{\text{١}}{\text{س}} \text{ لو هـ} - \text{لو س} \times \frac{\text{١}}{\text{س}} \text{ لو هـ}}{(\text{١} + \text{لو س})^{\text{٢}}}$

$= \frac{\text{لو هـ}}{\text{س } (\text{١} + \text{لو س})^{\text{٢}}}$

(١٧) $\text{ص} = \frac{(\text{لو}_{\text{هـ}} \text{ س}) - \text{١}}{(\text{لو}_{\text{هـ}} \text{ س}) + \text{١}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{(\text{لو}_{\text{هـ}} \text{ س} + \text{١}) \times \frac{\text{١}}{\text{س}} - (\text{لو}_{\text{هـ}} \text{ س} - \text{١}) \times \frac{\text{١}}{\text{س}}}{(\text{لو}_{\text{هـ}} \text{ س} + \text{١})^{\text{٢}}}$

$= \frac{\text{٢}}{\text{س } (\text{لو}_{\text{هـ}} \text{ س} + \text{١})^{\text{٢}}}$

(١٨) $\text{ص} = \frac{\text{١} - \text{٢ لو}_{\text{هـ}} \text{ س}}{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{ س}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}} \text{ س} \times \left(\frac{-\text{٢}}{\text{س}}\right) - (\text{١} - \text{٢ لو}_{\text{هـ}} \text{ س}) \times \frac{\text{١}}{\text{س}}}{(\text{لو}_{\text{هـ}} \text{ س})^{\text{٢}}}$

$= \frac{-\text{٢ لو}_{\text{هـ}} \text{ س} - \text{١} + \text{٢ لو}_{\text{هـ}} \text{ س}}{\text{س } (\text{لو}_{\text{هـ}} \text{ س})^{\text{٢}}} = \frac{-\text{١}}{\text{س } (\text{لو}_{\text{هـ}} \text{ س})^{\text{٢}}}$

(٤) ص = ٢ − $\frac{س^٢}{٤}$ + لوهـ $\frac{س}{٢}$

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = − $\frac{١}{٢}$ س + $\frac{٢}{س}$ × $\frac{١}{٢}$

= − $\frac{١}{٢}$ س + $\frac{١}{س}$ = $\frac{− س^٢ + ٢}{٢ س}$

∵ المماس يوازى محور السينات

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

∴ − $س^٢$ + ٢ = ٠

∴ س = $\sqrt{٢}$ (والسالب مرفوض)

١١

ص = س $هـ^{٢ س}$

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $هـ^{٢ س}$ + ٢ س $هـ^{٢ س}$

= $هـ^{٢ س}$ (١ + ٢ س)

∴ ميل المماس = $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٢} هـ)}$

= هـ (١ + ٢ × $\frac{١}{٢}$) = ٢ هـ

∴ معادلة المماس $\frac{ص − \frac{١}{٢} هـ}{س − \frac{١}{٢}}$ = ٢ هـ

منها ٤ هـ س − ٢ ص − هـ = ٠

١٢

ص = $هـ^{٢ س}$ جتا س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ $هـ^{٢ س}$ جتا س + $هـ^{٢ س}$ × − جا س

= $هـ^{٢ س}$ (٢ جتا س − جا س)

∴ ميل المماس $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س = ٠}$ = ٢

، عند س = ٠ فإن ص = ١

∴ النقطة هى (٠ ، ١)

∴ معادلة المماس = $\frac{ص − ١}{س − ٠}$ = ٢

∴ ٢ س − ص + ١ = ٠

١٣

ص = $٢^{− س}$ + $٢^{س}$

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $٢^{س}$ لوهـ ٢ − $٢^{− س}$ لوهـ ٢

∴ ميل المماس = $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(٢ ، \frac{١٧}{٤})}$ = $\frac{١٥}{٤}$ لوهـ ٢

∴ معادلة المماس هى $\frac{ص − \frac{١٧}{٤}}{س − ٢}$ = $\frac{١٥}{٤}$ لوهـ ٢

أى أن ١٥ س لوهـ ٢ − ٤ ص − ٣٠ لوهـ ٢ + ١٧ = ٠

١٤

ص = $\frac{هـ^{\frac{٣}{٢}}}{س}$ = $س^{−١}$ $هـ^{\frac{٣}{٢}}$

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{− هـ^{\frac{٣}{٢}}}{س^٢}$ ، $\frac{\frac{١}{٢} هـ^{\frac{٣}{٢}}}{س}$

∴ ميل المماس = $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(٢ ، \frac{١}{٢} هـ)}$ = $\frac{− هـ}{٩}$ + $\frac{هـ}{٩}$ = ٠

معادلة المماس : ص = $\frac{هـ}{٢}$

١٥

ص = ٢ $هـ^{− س}$ ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = − ٢ $هـ^{− س}$

∴ ميل المماس = $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س = −١}$ = − ٢ $هـ^{١}$ = $\frac{− ٢}{هـ}$ (كذا)

∴ ميل العمودى = $\frac{هـ}{٢}$

، عند س = −١ فإن ص = $\frac{٢}{هـ}$

∴ النقطة هى $\left(−١ ، \frac{٢}{هـ}\right)$

∴ معادلة العمودى هى $\frac{ص − \frac{٢}{هـ}}{س + ١}$ = $\frac{هـ}{٢}$

ومنها $هـ^٢$ س − ٢ هـ ص + ($هـ^٢$ + ٤) = ٠

١٦

ص = $س^٢$ − ١٨ لوهـ س

، عند س = ٢ فإن ص = ٨ − ١٨ لوهـ ٢

، $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ س − $\frac{١٨}{س}$ ، ... = − ١٨

∴ ميل المماس = $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س = ٢}$ = − ٥

∴ معادلة المماس هى $\frac{ص − ٨ + ١٨ لوهـ ٢}{س − ٢}$ = − ٥

∴ ٥ س + ص − ١٨ لوهـ ٢ − ٢ = ٠

∴ معادلة العمودى هى $\frac{ص − ٨ + ١٨ لوهـ ٢}{س − ٢}$ = $\frac{١}{٥}$

س − ٥ ص + ٩٠ لوهـ ٢ − ٤٢ = ٠

١٧

ص = لوهـ (٢ − $\sqrt{٢}$ جا س)

، عند س = $\frac{π}{٤}$ فإن ص = ٠

، $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{− \sqrt{٢} جتا س}{٢ − \sqrt{٢} جا س}$

∴ ميل المماس = $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س = \frac{π}{٤}}$ = − ١

∴ معادلة المماس هى $\frac{ص − ٠}{س − \frac{π}{٤}}$ = − ١

منها س + ص − $\frac{π}{٤}$ = ٠

١٨

$\frac{ءس}{ءن}$ = $هـ^{ن}$ ، $\frac{ءص}{ءن}$ = $هـ^{ن}$ + ٢ $هـ^{٢ن}$

عند س = ١ تكون ن = ٠ ، ص = ٢

$\frac{ءص}{ءس}$ = ($هـ^{ن}$ + ٢ $هـ^{٢ن}$) ÷ $هـ^{ن}$

= ١ + ٢ $هـ^{ن}$

$\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س = ١}$ = ١ + ٢ $هـ^{٠}$ = ٣

ميل المماس = ٣

∴ ميل العمودى = $\frac{−١}{٣}$

∴ معادلة العمودى هى $\frac{ص − ٢}{س − ١}$ = $\frac{−١}{٣}$

∴ س + ٣ ص − ٧ = ٠

حل آخر :

س = $هـ^{ن}$

∴ ص = س + $س^٢$

عند س = ١ ∴ ص = ٢

، $\frac{ءص}{ءس}$ = ١ + ٢ س

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س = ١}$ = ١ + ٢ = ٣

ميل العمودى = $\frac{−١}{٣}$ عند النقطة (١ ، ٢)

∴ معادلة العمودى هى $\frac{ص − ٢}{س − ١}$ = $\frac{−١}{٣}$

∴ س + ٣ ص − ٧ = ٠

١٩

(١) (ب)	(٢) (د)	(٣) (هـ)	(٤) (ب)
(٥) (جـ)	(٦) (أ)	(٧) (د)	(٨) (ب)
(٩) (أ)	(١٠) (د)	(١١) (ب)	(١٢) (د)
(١٣) (أ)	(١٤) (د)	(١٥) (أ)	(١٦) (د)
(١٧) (أ)	(١٨) (ب)	(١٩) (ب)	(٢٠) (ب)
(٢١) (أ)	(٢٢) (ب)	(٢٣) (ب)	(٢٤) (أ)

٢٠

بفرض ص = $\sum_{ن=٠}^{∞} \frac{س^{ن}}{\lfloor ن}$

= ١ + $\frac{س}{١}$ + $\frac{س^٢}{\lfloor ٢}$ + $\frac{س^٣}{\lfloor ٣}$ + ...

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ + ١ + $\frac{س}{\lfloor ١}$ + $\frac{س^٢}{\lfloor ٢}$ + $\frac{س^٣}{\lfloor ٣}$ + ...

= ص

∴ $\frac{ء}{ءس}$ ($هـ^{س}$) = $هـ^{س}$

٢١

ص = $س^٢$ لوهـ $\frac{س}{٢}$

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ س لوهـ $\frac{س}{٢}$ + $س^٢$ × $\frac{٢}{س}$ × $\frac{١}{٢}$

= ٢ س لوهـ $\frac{س}{٢}$ + س

، $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = ٢ لوهـ $\frac{س}{٢}$ + ٢ س × $\frac{١}{س}$ + ١

= ٢ لوهـ $\frac{س}{٢}$ + ٣

٤٣

س = ص^٢ + هـ^(√ص) بالاشتقاق بالنسبة إلى ص

∴ ء س / ء ص = ٢ ص هـ^(√ص) + ص^٢ هـ^(√ص) × 1 / (٢ √ص)

= ٢ ص هـ^(√ص) + ½ ص √ص هـ^(√ص)

= ½ ص هـ^(√ص) (٤ + √ص)

٤٤

س = ص^٢ لوهـ ص (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ ١ = (٢ ص لوهـ ص + ص^٢ × 1/ص) ء ص / ء س

∴ ء ص / ء س = 1 / (٢ ص لوهـ ص + ص)

٤٥

ص = لوهـ (قتا س − ظتا س)

∴ ء ص / ء س = (− قتا س ظتا س + قتا^٢ س) / (قتا س − ظتا س)

= قتا س (− ظتا س + قتا س) / (قتا س − ظتا س) = قتا س

٤٧

ص = لوهـ ظا س

∴ ء ص / ء س = قا^٢ س / ظا س = 1 / (جتا^٢ س) × جتا س / جا س

= 1 / (جا س جتا س) = 1 / (½ جا ٢ س)

= ٢ قتا ٢ س

٤٨

ص = لوهـ (√ظا س)

∴ ء ص / ء س = 1 / √ظا س × قا^٢ س / (٢ √ظا س) = قا^٢ س / (٢ ظا س) = ½ ظا س

٤٩

ص = لوهـ (س + √(س^٢ + ٤))

∴ ء ص / ء س = (١ + ٢ س / (٢ √(س^٢ + ٤))) / (س + √(س^٢ + ٤))

= (√(س^٢ + ٤) + س) / ((س + √(س^٢ + ٤)) √(س^٢ + ٤))

= 1 / √(س^٢ + ٤)

٣٥

∴ ء ٢ ص / ء س ٢ = ٩ (ص − س^٢) + ٢

∴ ء ٢ ص / ء س ٢ − ٢ = ٩ (ص − س^٢)

٣٣

ص = ٢ هـ^(س^٢ + ١)

∴ ء ص / ء س = ٢ ٢ س هـ^(س^٢ + ١)

∴ ء ٢ ص / ء س ٢ = ٢ ٢ هـ^(س^٢ + ١) + ٤ ٢ س^٢ هـ^(س^٢ + ١)

= ٢ ٢ هـ^(س^٢ + ١) (١ + ٢ س^٢)

∴ ء ٣ ص / ء س ٣ = ٤ ٢ س هـ^(س^٢ + ١) (١ + ٢ س^٢)

+ ٨ ٢ س هـ^(س^٢ + ١)

= ٤ ٢ س هـ^(س^٢ + ١) (١ + ٢ س^٢ + ٢)

= ٤ س ص (٣ + ٢ س^٢)

٣٦

∴ س ص ص″ + ٢ ص ص′ = س ص′^٢

∴ س ص ص″ + ٢ ص ص′ − س ص′^٢ = ٠

٣٤

ص = √((س^٢ + ١) / (س^٢ − ١)) بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس (هـ)

∴ لوهـ ص = ½ لوهـ (س^٢ + ١) − ½ لوهـ (س^٢ − ١)

بالاشتقاق بالنسبة إلى س

∴ ص′ / ص = ½ × ٢ س / (س^٢ + ١) − ½ × ٢ س / (س^٢ − ١)

∴ ص′ / ص = س / (س^٢ + ١) − س / (س^٢ − ١)

= س (س^٢ − ١ − س^٢ − ١) / (س^٤ − ١)

∴ ص′ / ص = − ٢ س / (س^٤ − ١)

∴ (س^٤ − ١) ص′ + ٢ س ص = ٠

٣٥

ص = هـ^(−س) √((١ + س) / (١ − س))

بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

∴ لوهـ ص = لوهـ هـ^(−س) + ½ لوهـ ((١ + س) / (١ − س))

بالاشتقاق بالنسبة إلى س

∴ 1/ص × ص′ = −١ + ½ × (١ − س) / (١ + س)

× ((١ − س)(١) − (١ + س)(−١)) / (١ − س)^٢

∴ ص′ / ص = −١ + 1 / (١ − س^٢) بالضرب × ص (١ − س^٢)

∴ (١ − س^٢) ص′ = − ص + س^٢ ص + ص

= س^٢ ص

٣٦

بفرض أن ص = لوهـ (٩ + س^٢)

∴ ء ص / ء س = ٢ س^٢ × 1 / (٩ + س^٢)

بفرض أن ع = س^٢ + ٢

∴ ء ع / ء س = ٢ س

∴ ء ص / ء ع = ء ص / ء س ÷ ء ع / ء س = ٢ س^٢ / (٩ + س^٢) × 1 / (٢ س)

= ٢/٢ × س / (٩ + س^٢)

∴ (ء ص / ء ع) عند س = ١ = ٢/٢ (1/١٠) = ٢/٢٠

٣٧

① ص = هـ^(أ س)   ∴ ء ص / ء س = أ هـ^(أ س)

∴ ء ٢ ص / ء س ٢ = أ^٢ هـ^(أ س)   ∴ ء ٢ ص / ء س ٢ = أ^٢ هـ^(أ س) = أ^٢ ص

∴ ء ٢ ص / ء س ٢ − أ^٢ ص = ٠

② ∵ ء ٢ ص / ء س ٢ − ٢ ء ص / ء س + ص = ٠

∴ أ^٢ هـ^(أ س) − ٢ أ هـ^(أ س) + هـ^(أ س) = ٠

∴ هـ^(أ س) (أ^٢ − ٢ أ + ١) = ٠

∴ هـ^(أ س) (أ − ١)^٢ = ٠

∴ (أ − ١)^٢ = ٠   ∴ أ = ١

٣٨

س هـ^ص = ٢ − لوهـ ٢ + لوهـ س

بالاشتقاق بالنسبة إلى ن

∴ س هـ^ص ء ص / ء ن + هـ^ص ء س / ء ن = 1/س × ء س / ء ن

∴ ء س / ء ن = ٦ عند س = ٢ ، ص = ٠

∴ ٢ × هـ^٠ × ء ص / ء ن + هـ^٠ × ٦ = ½ × ٦

∴ ٢ ء ص / ء ن = −٣   ∴ ء ص / ء ن = −٣/٢

٣٩

① ص = قا (هـ^س)

∴ ء ص / ء س = قا (هـ^س) ظا (هـ^س) × (هـ^س)

= هـ^س قا (هـ^س) ظا (هـ^س)

② ص هـ^س = هـ^٢   ∴ ص = هـ^(٢ − س)

∴ ء ص / ء س = − هـ^(٢ − س)

③ س لوهـ ص = ٥٨   ∴ لوهـ ص = ٥٨/س

∴ ص = هـ^(٥٨/س)

∴ ء ص / ء س = هـ^(٥٨/س) × (−٥٨/س^٢) = (−٥٨/س^٢) هـ^(٥٨/س)

④ ص = لوهـ |س^٣ − ٧ س^٢ − ١٢|

∴ ء ص / ء س = (٣ س^٢ − ١٤ س) / (س^٣ − ٧ س^٢ − ١٢)

⑤ ص = ٢^(قا^٢ س)

∴ ء ص / ء س = ٢^(قا^٢ س) × لوهـ ٢ × ٢ قا س

× قا س ظا س

= ٢ قا^٢ س ظا س × ٢^(قا^٢ س) لوهـ ٢

⑥ ص = لو |ظا س|

∴ ء ص / ء س = قا^٢ س / ظا س لو هـ = قا س قتا س لو هـ

⑦ ص = جا (لو س)

∴ ء ص / ء س = جتا (لو س) × 1/س لو هـ

= جتا (لو س) × لو هـ / س

⑧ ص = لو (جتا ٥ س)

∴ ء ص / ء س = (−٥ جا ٥ س) / (جتا ٥ س) × لو هـ = −٥ ظا ٥ س لو هـ

⑨ ص = هـ^(جا س) × جا هـ^س

∴ ء ص / ء س = هـ^(جا س) × جتا س × جا هـ^س + هـ^(جا س)

× جتا هـ^س × هـ^س

= هـ^(جا س) (جتا س × جا هـ^س + جتا هـ^س × هـ^س)

⑩ ص = 1 / (هـ^س ظا س) = هـ^(−س) ظتا س

∴ ء ص / ء س = − هـ^(−س) ظتا س + هـ^(−س) × − قتا^٢ س

= − هـ^(−س) (ظتا س + قتا^٢ س)

⑪ ص = √((١ + هـ^س) / (١ − هـ^س)) بأخذ لوغاريتم الطرفين

∴ لو ص = ½ لو (١ + هـ^س) − ½ لو (١ − هـ^س)

بالاشتقاق بالنسبة لـ س

∴ ص′ / ص = ½ لو هـ^س / (١ + هـ^س) − ½ لو (− هـ^س) / (١ − هـ^س)

= ½ (هـ^س (١ − هـ^س + ١ + هـ^س)) / (١ − هـ^(٢س)) لو هـ

= هـ^س / (١ − هـ^(٢س))

∴ ء ص / ء س = هـ^س / (١ − هـ^(٢س)) × √((١ + هـ^س) / (١ − هـ^س))

⑫ ص = لوهـ لوهـ س

∴ ء ص / ء س = 1 / لوهـ س × 1/س = 1 / (س لوهـ س)

⑬ ص = لوهـ لوهـ لوهـ س

∴ ء ص / ء س = 1 / (لوهـ لوهـ س) × 1 / لوهـ س × 1/س

= 1 / (س لوهـ لوهـ س × لوهـ س)

⑭ ص = لوهـ (١ + هـ^(٢س))

∴ ء ص / ء س = ٢ هـ^(٢س) / (١ + هـ^(٢س))

⑮ ص = لوهـ (هـ^(م س) + هـ^(−م س))

∴ ء ص / ء س = (م هـ^(م س) − م هـ^(−م س)) / (هـ^(م س) + هـ^(−م س))

⑯ ص = لو √س

∴ ء ص / ء س = لو هـ / √س × 1 / (٢ √س) = لو هـ / (٢ س)

⑰ ص = √(لو س)

∴ ء ص / ء س = 1 / (٢ √(لو س)) × 1/س لو هـ = لو هـ / (٢ س √(لو س))

⑱ ص = (س + لوهـ (٢ س))^٣

∴ ء ص / ء س = ٣ (س + لوهـ ٢ س)^٢ × (١ + ٢ / (٢ س))

= ٣ (١ + 1/س) (س + لوهـ ٢ س)^٢

[illegible] بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

∴ لو$_{هـ}$ ص = [illegible] بالاشتقاق بالنسبة إلى س

∴ $\frac{ص'}{ص}$ = [illegible]

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = (هـ^{س} لو$_{هـ}$ س + $\frac{هـ^{س}}{س}$) × س$^{هـ^{س}}$

(١٠) ص = هـ$^{س^{هـ}}$ بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

∴ لو$_{هـ}$ ص = س^{هـ} لو$_{هـ}$ هـ = س^{هـ}

بالاشتقاق بالنسبة إلى س

∴ $\frac{ص'}{ص}$ = هـ س$^{هـ-١}$

∴ ص' = هـ س$^{هـ-١}$ × هـ$^{س^{هـ}}$

(١١) ص = هـ$^{هـ^{س}}$ بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

∴ لو$_{هـ}$ ص = هـ^{س} لو$_{هـ}$ هـ = هـ^{س}

بالاشتقاق بالنسبة إلى س

∴ $\frac{ص'}{ص}$ = هـ^{س}

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = هـ^{س} × هـ$^{هـ^{س}}$ = هـ$^{هـ^{س} + س}$

(١٢) ص = (لو س)$^{لو س}$

بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

∴ لو$_{هـ}$ ص = لو س لو$_{هـ}$ لو س

بالاشتقاق بالنسبة إلى س

∴ $\frac{ص'}{ص}$ = $\frac{١}{س}$ لو هـ لو$_{هـ}$ لو س + لو س × $\frac{١}{لو س}$ × $\frac{١}{س}$ لو هـ

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{ص لو هـ}{س}$ [لو$_{هـ}$ لو س + ١]

(١٣) ص = (لو س)$^{ظا س}$

بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

∴ لو$_{هـ}$ ص = ظا س لو$_{هـ}$ لو س

بالاشتقاق بالنسبة إلى س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = قا^{٢} س لو$_{هـ}$ لو س + ظا س × $\frac{١}{س لو س}$ لو هـ

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = (لو س)$^{ظا س}$ (قا^{٢} س لو$_{هـ}$ لو س + $\frac{ظا س لو هـ}{س لو س}$)

(١٤) ص = (س^{٢} + ٢)$^{لو س}$ بأخذ لوغاريتم الطرفين

∴ لو$_{هـ}$ ص = لو س لو$_{هـ}$ (س^{٢} + ٢)

∴ $\frac{ص'}{ص}$ = $\frac{١}{س}$ لو هـ لو$_{هـ}$ (س^{٢} + ٢) + لو س × $\frac{٢س}{س^{٢} + ٢}$

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ص ($\frac{١}{س}$ لو هـ لو$_{هـ}$ (س^{٢} + ٢) + $\frac{٢س لو س}{س^{٢} + ٢}$)

(١٥) ص = (لو س)^{س}

∴ لو$_{هـ}$ ص = س لو$_{هـ}$ لو س

∴ $\frac{ص'}{ص}$ = لو$_{هـ}$ لو س + س × $\frac{١}{لو س}$ × $\frac{١}{س}$ لو هـ

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = (لو س)^{س} [لو$_{هـ}$ لو س + $\frac{لو هـ}{لو س}$]

(١٦) ص = س$^{س^{س}}$

بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

∴ لو$_{هـ}$ ص = س^{س} لو$_{هـ}$ س

بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

∴ لو$_{هـ}$ لو$_{هـ}$ ص = س لو$_{هـ}$ س + لو$_{هـ}$ لو$_{هـ}$ س

بالاشتقاق بالنسبة إلى س

[illegible]

∴ [illegible] = ($\frac{١}{س}$ + لو$_{هـ}$ س) + ($\frac{١}{س}$ لو$_{هـ}$ س × $\frac{١}{س}$)

∴ $\frac{١}{ص لو_{هـ} ص}$ ص' = (١ + لو$_{هـ}$ س) + $\frac{١}{س لو_{هـ} س}$

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ص لو$_{هـ}$ ص [(١ + لو$_{هـ}$ س) + $\frac{١}{س لو_{هـ} س}$]

١١

$\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{١}{س}$

∴ ميل المماس = ($\frac{ءص}{ءس}$)$_{س = ١}$ = ١

∴ عند س = ١ فإن ص = لو$_{هـ}$ ١ = صفر

∴ نقطة التماس هي (١ ، صفر)

∴ معادلة المماس هي $\frac{ص - ٠}{س - ١}$ = ١

∴ ص - س = -١

بالقسمة على [illegible]

∴ $\frac{س}{[illegible]}$ + $\frac{ص}{[illegible]}$ = ١

∴ نقط تقاطع المماس مع المحاور هي

أ (١ ، ٠) ، ب (٠ ، -١)

∴ طول أ ب = $\sqrt{(١)^{٢} + (-١)^{٢}}$

= $\sqrt{٢}$ وحدة طول

١٢

ص = لو$_{هـ}$ ٢ س ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{١}{س}$

، ميل المماس = ($\frac{ءص}{ءس}$)$_{(١ ، لو_{هـ} ٢)}$ = ١

∴ ميل العمودي = -١

[illegible]

∴ [illegible]

بالقسمة على [illegible]

∴ [illegible] = ١

∴ المستقيم يقطع محور الصادات في النقطة ب

(٠ ، [illegible])

∴ طول أ ب = $\sqrt{(١ - لو_{هـ} ٢ هـ)^{٢} + (لو_{هـ} ٢ - ٠)^{٢}}$

= $\sqrt{(لو_{هـ} هـ - لو_{هـ} ٢ هـ)^{٢} + (لو_{هـ} ٢)^{٢}}$

= $\sqrt{(لو_{هـ} \frac{هـ}{٢ هـ})^{٢} + (لو_{هـ} ٢)^{٢}}$

= $\sqrt{(لو_{هـ} \frac{١}{٢})^{٢} + (لو_{هـ} ٢)^{٢}}$

= $\sqrt{(لو_{هـ} ٢)^{٢} + (لو_{هـ} ٢)^{٢}}$

= $\sqrt{٢}$ لو$_{هـ}$ ٢ ≃ ٠.٩٨ وحدة طول

١٣

ص = هـ^{س}

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = هـ^{س}

∴ ميل المماس = ($\frac{ءص}{ءس}$)$_{(٢ ، هـ^{٢})}$ = هـ^{٢}

معادلة المماس $\frac{ص - هـ^{٢}}{س - ٢}$ = هـ^{٢}

∴ هـ^{٢} س - ص = ٢ هـ^{٢} - هـ^{٢} = هـ^{٢} (بالقسمة على هـ^{٢})

∴ $\frac{س}{١}$ + $\frac{ص}{-هـ^{٢}}$ = ١

∴ أ (١ ، ٠) ، ب (٠ ، -هـ^{٢})

∴ أ ب = $\sqrt{(١ - ٠)^{٢} + (٠ + هـ^{٢})^{٢}}$ = $\sqrt{١ + هـ^{٤}}$

≃ ٧.٤٦ وحدة طول

∴ $دَ(س) = قا^2 س\ هـ^{ظا س} = قا^2 س × د(س)$

∵ $قا^2 س ≥ ١$ لجميع قيم $س ∈ ح$

∴ $دَ(س) ≥ د(س)$

(٤) ∵ ر هي الدالة العكسية للدالة د

∴ $ر[د(س)] = س$

∴ $رَ(د(س)) × دَ(س) = ١$

بوضع س = صفر

∴ $رَ(د(٠)) × دَ(٠) = ١$

∵ $د(٠) = ١$ ، $دَ(س) = ٣س^2 + ٣ + هـ^س$

∴ $دَ(٠) = ٤$ ∴ $رَ(١) × دَ(٠) = ١$

∴ $رَ(١) × ٤ = ١$ ∴ $رَ(١) = \frac{١}{٤}$

٥٥

$س = هـ^{جتا ٢ه}$ ∴ $لو_هـ س = جتا ٢ه$ (١)

، $ص = هـ^{جا ٢ه}$ ∴ $لو_هـ ص = جا ٢ه$ (٢)

باشتقاق المعادلة (١) بالنسبة إلى ه

∴ $\frac{١}{س} × \frac{ءس}{ءه} = -٢ جا ٢ه = -٢ لو_هـ ص$ (٣)

، باشتقاق المعادلة (٢) بالنسبة إلى ه

∴ $\frac{١}{ص} × \frac{ءص}{ءه} = ٢ جتا ٢ه = ٢ لو_هـ س$ (٤)

بقسمة (٤) على (٣)

∴ $\frac{\frac{١}{ص} × \frac{ءص}{ءه}}{\frac{١}{س} × \frac{ءس}{ءه}} = \frac{٢ لو_هـ س}{-٢ لو_هـ ص}$

∴ $\frac{س}{ص} × \frac{ءص}{ءس} = \frac{-لو_هـ س}{لو_هـ ص}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-ص لو_هـ س}{س لو_هـ ص}$

∴ $س = هـ^{جتا ٢ه}$ ∴ $لو_هـ س = جتا ٢ه$

، $ص = هـ^{جا ٢ه}$ ∴ $لو_هـ ص = جا ٢ه$

بالتربيع والجمع :

$(لو_هـ س)^2 + (لو_هـ ص)^2 = (جتا ٢ه)^2 + (جا ٢ه)^2 = ١$

بالتفاضل بالنسبة لـ س

∴ $\frac{٢ لو_هـ س}{س} + \frac{٢ لو_هـ ص}{ص} × صَ = ٠$

∴ $صَ = \frac{-ص لو_هـ س}{س لو_هـ ص}$

٥٦

$ص = أ جتا(لو_هـ س) + ب جا(لو_هـ س)$

بالتفاضل بالنسبة لـ س

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-أ جا(لو_هـ س)}{س} + \frac{ب جتا(لو_هـ س)}{س}$

(بالضرب × س)

∴ $س \frac{ءص}{ءس} = -أ جا(لو_هـ س) + ب جتا(لو_هـ س)$

بالتفاضل بالنسبة لـ س

∴ $س \frac{ء^2ص}{ءس^2} + \frac{ءص}{ءس}$

$= \frac{-أ جتا(لو_هـ س)}{س} - \frac{ب جا(لو_هـ س)}{س}$ (بالضرب × س)

∴ $س^2 \frac{ء^2ص}{ءس^2} + س \frac{ءص}{ءس}$

$= -(أ جتا(لو_هـ س) + ب جا(لو_هـ س)) = -ص$

∴ $س^2 \frac{ء^2ص}{ءس^2} + س \frac{ءص}{ءس} + ص = صفر$

∵ $ص = س^س$

∴ $لو_هـ ص = س لو_هـ س$

باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

∴ $\frac{١}{ص} × صَ = س × \frac{١}{س} + لو_هـ س$

∴ $\frac{١}{ص} × صَ = ١ + لو_هـ س$

∴ $صَ = ص(١ + لو_هـ س)$

∴ $صَ = س^س(١ + لو_هـ س)$

باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

∴ $صً = س^س \left(\frac{١}{س}\right) + (١ + لو_هـ س)$

$× س^س × (١ + لو_هـ س)$

∴ $صً = س^س × (١ + لو_هـ س)^2 + س^{س-١}$

٥٨

$ص = \frac{١}{٢} لو_هـ \left[\left(\frac{١ - جتا ٢س}{١ + جتا ٢س}\right)\right] = \frac{١}{٢} لو_هـ \frac{٢ جا^2 س}{٢ جتا^2 س}$

$= \frac{١}{٢} لو_هـ ظا^2 س$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢} × \frac{١}{ظا^2 س} × ٢ ظا س × قا^2 س$

$= \frac{جتا^2 س}{جا^2 س} × \frac{جا س}{جتا س} × \frac{١}{جتا^2 س}$

$= \frac{١}{جا س جتا س} = \frac{١}{\frac{١}{٢} جا ٢س} = ٢ قتا ٢س$

٥٩

$ص = لو_هـ \left(\frac{\sqrt{س^2 + ١} - ١}{\sqrt{س^2 + ١} + ١}\right)$

$= لو_هـ (\sqrt{س^2 + ١} - ١) - لو_هـ (\sqrt{س^2 + ١} + ١)$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{\frac{س}{\sqrt{س^2+١}}}{\sqrt{س^2+١} - ١} - \frac{\frac{س}{\sqrt{س^2+١}}}{\sqrt{س^2+١} + ١}$

$= \frac{س}{\sqrt{س^2+١}} × \left(\frac{١}{\sqrt{س^2+١} - ١} - \frac{١}{\sqrt{س^2+١} + ١}\right)$

$= \frac{س}{\sqrt{س^2+١}} × \left(\frac{\sqrt{س^2+١} + ١ - \sqrt{س^2+١} + ١}{س^2 + ١ - ١}\right)$

$= \frac{س}{\sqrt{س^2+١}} × \left(\frac{٢}{س^2}\right) = \frac{٢}{س\sqrt{س^2 + ١}}$

٦٠

$ص = س^{س^{س^{\cdot^{\cdot}}}}$ بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

∴ $لو_هـ ص = س^{س^{س^{\cdot^{\cdot}}}} لو_هـ س$

∴ $لو_هـ ص = ص لو_هـ س$

بالاشتقاق بالنسبة إلى س

∴ $\frac{صَ}{ص} = صَ لو_هـ س + \frac{ص}{س}$ (بالضرب × ص س)

∴ $س صَ = س ص صَ لو_هـ س + ص^2$

∴ $س صَ (١ - ص لو_هـ س) = ص^2$

∴ $س صَ = \frac{ص^2}{١ - ص لو_هـ س}$

٦١

$ص = \sqrt{لو_هـ س + \sqrt{لو_هـ س + \sqrt{لو_هـ س + ...}}}$

(بتربيع الطرفين)

∴ $ص^2 = لو_هـ س + \sqrt{لو_هـ س + \sqrt{لو_هـ س + ...}}$

∴ $ص^2 = لو_هـ س + ص$ (بالاشتقاق بالنسبة إلى س)

∴ $٢ ص صَ = \frac{١}{س} + صَ$

∴ $٢ ص صَ - صَ = \frac{١}{س}$

∴ $(٢ص - ١) صَ = \frac{١}{س}$

$\int \frac{هـ^{٢\sqrt{س}}}{\sqrt{س}}\,ءس = ١ \int \frac{٢}{٢\sqrt{س}}\, هـ^{٢\sqrt{س}}\,ءس$

$= ٢ هـ^{\sqrt{س}} + ث$

(١٠) بفرض أن: د (س) = $-\sqrt{س}$

∴ د̃ (س) = $\frac{-١}{٢\sqrt{س}}$

∴ $\int \frac{١}{\sqrt{س}\, هـ^{\sqrt{س}}} = -٢ \int \frac{-١}{٢\sqrt{س}}\, هـ^{-\sqrt{س}}\,ءس$

$= -٢ هـ^{-\sqrt{س}} + ث$

(١١) بفرض أن: د (س) = ١ + ٢ هـ^س

∴ د̃ (س) = ٢ هـ^س

$\int \frac{هـ^{س}}{\sqrt{١ + ٢ هـ^{س}}}\,ءس$

$= \frac{١}{٢} \int ٢ هـ^{س} (١ + ٢ هـ^{س})^{-\frac{١}{٢}}\,ءس$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{(١ + ٢ هـ^{س})^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + ث = (١ + ٢ هـ^{س})^{\frac{١}{٢}} + ث$

(١٢) بفرض أن: د (س) = هـ^س + ١

∴ د̃ (س) = هـ^س

∴ $\int ٩ (هـ^{س} + ١)^{٨} \times هـ^{س}\,ءس = (هـ^{س} + ١)^{٩} + ث$

(١٣) بفرض أن: د (س) = جا س

∴ د̃ (س) = جتا س

$\int ٢^{جا س}\, جتا س\,ءس = \int (جتا س) \times ٢^{جا س}\,ءس$

$= \frac{٢^{جا س}}{لو_{هـ} ٢} + ث$

(١٤) بفرض أن: د (س) = جتا س

∴ د̃ (س) = − جا س

∴ $\int ٧^{جتا س}\, جا س\,ءس = -\int -جا س \times ٧^{جتا س}\,ءس$

$= \frac{-٧^{جتا س}}{لو_{هـ} ٧} + ث$

(١) $\int \frac{٢}{س}\,ءس = ٢ لو_{هـ} |س| + ث$

(٢) $\int \frac{١}{٢ س}\,ءس = \frac{١}{٢} لو_{هـ} |س| + ث$

(٣) $\int \frac{١}{س + ١}\,ءس = لو_{هـ} |س + ١| + ث$

(٤) $\int (س + \frac{١}{س})\,ءس = \frac{س^{٢}}{٢} + لو_{هـ} |س| + ث$

(٥) $\int (\frac{٤}{س} - هـ^{-س})\,ءس$

$= ٤ لو_{هـ} |س| + هـ^{-س} + ث$

(٦) $\int (\frac{٢}{س} + ٤ هـ^{-٢س})\,ءس$

$= ٢ لو_{هـ} |س| + \frac{٤ هـ^{-٢س}}{-٢} + ث$

$= ٢ لو_{هـ} |س| - ٢ هـ^{-٢س} + ث$

(٧) $\int \frac{٤}{٣ س لو_{هـ} ٥}\,ءس = \frac{٤}{٣ لو_{هـ} ٥} لو_{هـ} |س| + ث$

(٨) $\int \frac{لو_{هـ} ٢}{س}\,ءس = لو_{هـ} ٢ \,.\, لو_{هـ} |س| + ث$

(٩) $\int \frac{لو_{هـ} س^{٢}}{س لو_{هـ} س^{٣}}\,ءس = \int \frac{٢ لو_{هـ} س}{٣ س لو_{هـ} س}\,ءس$

$= \int \frac{٢}{٣ س}\,ءس = \frac{٢}{٣} لو_{هـ} |س| + ث$

(١٠) $\int \frac{لو_{هـ} س}{س لو_{هـ} \sqrt{س}}\,ءس = \int \frac{لو_{هـ} س}{\frac{١}{٢} س لو_{هـ} س}\,ءس$

$= \int \frac{٢}{س}\,ءس = ٢ لو_{هـ} |س| + ث$

(١١) $\int (\frac{٢ هـ}{س} + \frac{س}{هـ})\,ءس$

$= ٢ هـ لو_{هـ} |س| + \frac{١}{٢ هـ} س^{٢} + ث$

(١٢) $\int (\frac{هـ^{٢}}{س} + س لو_{هـ} ٢)\,ءس$

$= هـ^{٢} لو_{هـ} |س| + \frac{١}{٢} س^{٢} لو_{هـ} ٢ + ث$

$= -٢ هـ^{-س} + \pi لو_{هـ} |س| + ث$

(١٤) $\int (٣ س^{٢} + \frac{٥}{س})\,ءس$

$= س^{٣} + ٥ لو_{هـ} |س| + ث$

(١٥) $\int (س^{٦} + ٥ هـ^{س} + \frac{١}{س})\,ءس$

$= \frac{١}{٧} س^{٧} + ٥ هـ^{س} + لو_{هـ} |س| + ث$

(١٦) $\int (جا س - \frac{٢}{س} + هـ^{س})\,ءس$

$= - جتا س - ٢ لو_{هـ} |س| + هـ^{س} + ث$

(١٧) $\int (هـ^{س} + ٣^{س} + \frac{١}{س})\,ءس$

$= هـ^{س} + \frac{٣^{س}}{لو_{هـ} ٣} + لو_{هـ} |س| + ث$

(١٨) $\int (\frac{٥ س + ٧}{س} + هـ^{س})\,ءس$

$= \int (٥ + \frac{٧}{س} + هـ^{س})\,ءس$

$= ٥ س + ٧ لو_{هـ} |س| + هـ^{س} + ث$

(١٩) $\int (\frac{-٣}{س} + ٤ هـ^{-٠٫٤ س} + هـ^{٠٫١})\,ءس$

$= -٣ لو_{هـ} |س| + \frac{٤ هـ^{-٠٫٤ س}}{-٠٫٤} + هـ^{٠٫١} س + ث$

$= -٣ لو_{هـ} |س| - ١٠ هـ^{-٠٫٤ س} + هـ^{٠٫١} س + ث$

(٢٠) $\int \frac{٦ س^{٢} - ٥}{٣ س}\,ءس = \int (٢ س - \frac{٥}{٣ س})\,ءس$

$= س^{٢} - \frac{٥}{٣} لو_{هـ} |س| + ث$

(٢١) $\int \frac{س^{٢} - ٤}{س^{٢} - ٢ س}\,ءس = \int \frac{(س - ٢)(س + ٢)}{س (س - ٢)}\,ءس$

$\int \frac{س + ٢}{س}\,ءس = \int (١ + \frac{٢}{س})\,ءس$

$= س + ٢ لو_{هـ} |س| + ث$

$= \frac{١}{٢} س^{٢} - ٦ س + ٩ لو_{هـ} |س| + ث$

(٢٣) $\int \frac{(٢ س - ١)^{٢}}{٣ س}\,ءس = \int \frac{٤ س^{٢} - ٤ س + ١}{٣ س}\,ءس$

$= \int (\frac{٤}{٣} س - \frac{٤}{٣} + \frac{١}{٣ س})\,ءس$

$= \frac{٢}{٣} س^{٢} - \frac{٤}{٣} س + \frac{١}{٣} لو_{هـ} |س| + ث$

(٢٤) $\int (\frac{٤ هـ^{س} + س هـ^{٢س}}{س هـ^{س}})\,ءس$

$= \int (\frac{٤}{س} + هـ^{س})\,ءس$

$= ٤ لو_{هـ} |س| + هـ^{س} + ث$

٥

(١) $\int \frac{٤}{١ + ٢ س}\,ءس = ٢ \int \frac{٢}{١ + ٢ س}\,ءس$

$= ٢ لو_{هـ} |١ + ٢ س| + ث$

(٢) $\int \frac{ءس}{٤ س - ١} = \frac{١}{٤} \int \frac{٤}{٤ س - ١}\,ءس$

$= \frac{١}{٤} لو_{هـ} |٤ س - ١| + ث$

(٣) بفرض أن: د (س) = س² + ١

∴ د̃ (س) = ٢ س

$\int \frac{س}{س^{٢} + ١}\,ءس = \frac{١}{٢} \int \frac{٢ س}{س^{٢} + ١}\,ءس$

$= \frac{١}{٢} لو_{هـ} |س^{٢} + ١| + ث$

(٤) بفرض أن: د (س) = س² − ١

∴ د̃ (س) = ٢ س

∴ $\int \frac{٢ س}{س^{٢} - ١}\,ءس = \frac{٢}{٢} \int \frac{٢ س}{س^{٢} - ١}\,ءس$

$= \frac{٢}{٢} لو_{هـ} |س^{٢} - ١| + ث$

(٥) بفرض أن د(س) = س^٢ + ٢ س

∴ دَ(س) = ٢ س + ٢

∫ (س + ١)/(س^٢ + ٢ س) ء س = ١/٢ ∫ (٢ س + ٢)/(س^٢ + ٢ س) ء س

= ١/٢ لو_هـ |س^٢ + ٢ س| + ث

(٦) بفرض أن د(س) = س^٢ + ٢ س + ٧

∴ دَ(س) = ٢ س + ٢

∫ (س + ١)/(س^٢ + ٢ س + ٧) ء س

= ١/٢ ∫ (٢ س + ٢)/(س^٢ + ٢ س + ٧) ء س

= ١/٢ لو_هـ |س^٢ + ٢ س + ٧| + ث

(٧) بفرض أن د(س) = س^٢ + ٢ س − ٢

∴ دَ(س) = ٢ س + ٢

∴ ∫ (٢ س + ٢)/(س^٢ + ٢ س − ٢) ء س

= لو_هـ |س^٢ + ٢ س − ٢| + ث

(٨) بفرض أن د(س) = س^٢ − ٥ س + ١

∴ دَ(س) = ٢ س − ٥

∴ ∫ (٢ س − ٥)/(س^٢ − ٥ س + ١) ء س

= لو_هـ |س^٢ − ٥ س + ١| + ث

(٩) بفرض أن د(س) = ٢ س^٣ + س^٢ − ١

دَ(س) = ٦ س^٢ + ٢ س

∫ (٣ س^٢ + س)/(٢ س^٣ + س^٢ − ١) ء س

= ١/٢ ∫ (٦ س^٢ + ٢ س)/(٢ س^٣ + س^٢ − ١) ء س

= ١/٢ لو_هـ |٢ س^٣ + س^٢ − ١| + ث

(١٠) بفرض أن د(س) = س^٣ + ٦ س + ١٠

∴ دَ(س) = ٣ س^٢ + ٦

∴ ∫ (س^٢ + ٢)/(س^٣ + ٦ س + ١٠) ء س

= ١/٣ ∫ (٣ س^٢ + ٦)/(س^٣ + ٦ س + ١٠) ء س

= ١/٣ لو_هـ |س^٣ + ٦ س + ١٠| + ث

(١١) ∫ (٢ س − ١)/(س − ١) ء س

= ∫ (٢ س − ٢ + ١)/(س − ١) ء س

= ∫ ((٢ س − ٢)/(س − ١) + ١/(س − ١)) ء س

= ∫ (٢ + ١/(س − ١)) ء س

= ٢ س + لو_هـ |س − ١| + ث

(١٢) ∫ س^٢/(س + ١) ء س

= ∫ (س^٢ − ١ + ١)/(س + ١) ء س

= ∫ ((س^٢ − ١)/(س + ١) + ١/(س + ١)) ء س

= ∫ ((س − ١)(س + ١)/(س + ١) + ١/(س + ١)) ء س

= ∫ (س − ١ + ١/(س + ١)) ء س

= ١/٢ س^٢ − س + لو_هـ |س + ١| + ث

(١٣) بفرض أن د(س) = هـ^س + ٢

∴ دَ(س) = هـ^س

∫ هـ^س/(هـ^س + ٢) ء س = لو_هـ |هـ^س + ٢| + ث

(١٤) بالضرب بسطًا ومقامًا فى هـ^س

∴ التكامل = ∫ (هـ^س + هـ^−س)/(هـ^س − هـ^−س) ء س

ويفرض د(س) = هـ^س − هـ^−س

∴ دَ(س) = هـ^س + هـ^−س

∴ التكامل = لو_هـ |هـ^س − هـ^−س| + ث

٦

(١) ∫ ظا س ء س = ∫ جا س/جتا س ء س

= − ∫ (− جا س)/جتا س ء س = − لو_هـ |جتا س| + ث

(٢) ∫ ظتا س ء س = ∫ جتا س/جا س ء س

= لو_هـ |جا س| + ث

(٣) ∫ قا س ء س = ∫ قا س (قا س + ظا س)/(قا س + ظا س) ء س

= ∫ (قا^٢ س + قا س ظا س)/(قا س + ظا س) ء س

= لو_هـ |قا س + ظا س| + ث

(٤) ∫ قتا س ء س = ∫ قتا س (قتا س + ظتا س)/(قتا س + ظتا س) ء س

= − ∫ (− قتا^٢ س − قتا س ظتا س)/(قتا س + ظتا س) ء س

= − لو_هـ |قتا س + ظتا س| + ث

(٥) بفرض أن د(س) = ٢ + جا س

∴ دَ(س) = جتا س

∫ جتا س/(٢ + جا س) ء س = لو_هـ |٢ + جا س| + ث

(٦) بفرض أن د(س) = ١ + جتا س

∴ دَ(س) = − جا س

∴ ∫ جا س/(١ + جتا س) ء س = − ∫ (− جا س)/(١ + جتا س) ء س

= − لو_هـ |١ + جتا س| + ث

(٧) بفرض أن د(س) = ظا س

∴ دَ(س) = قا^٢ س

∫ قا^٢ س/ظا س ء س = لو_هـ |ظا س| + ث

(٨) بفرض أن د(س) = ظتا س

∴ دَ(س) = − قتا^٢ س

∴ ∫ قتا^٢ س/ظتا س ء س = − ∫ (− قتا^٢ س)/ظتا س ء س

= − لو_هـ |ظتا س| + ث

(٩) بفرض أن د(س) = جا س − جتا س

∴ دَ(س) = جتا س + جا س

∴ ∫ (جتا س + جا س)/(جا س − جتا س) ء س

= لو_هـ |جا س − جتا س| + ث

(١٠) ∫ (١ − ظا س)/(١ + ظا س) × (جتا س/جتا س) ء س

= ∫ (جتا س − جا س)/(جتا س + جا س) ء س

بفرض أن د(س) = جتا س + جا س

∴ دَ(س) = − جا س + جتا س

∴ التكامل = لو_هـ |جتا س + جا س| + ث

حل آخر :

التكامل = ∫ (ظا π/٤ − ظا س)/(١ + ظا π/٤ ظا س) = ∫ ظا (π/٤ − س)

= ∫ جا (π/٤ − س)/جتا (π/٤ − س) ء س

= لو_هـ |جتا (π/٤ − س)| + ث

(١١) بفرض أن د(س) = قا س − ١

∴ دَ(س) = قا س ظا س

∫ قا س ظا س/(قا س − ١) ء س = لو_هـ |قا س − ١| + ث

(١٢) بفرض أن د(س) = جا^٢ س + ٢ جا س − ١

∴ دَ(س) = ٢ جا س جتا س + ٢ جتا س

= جا ٢ س + ٢ جتا س

[illegible] = لو_هـ |جا^٢ س + ٢ جا س − ١| + ث

(١٣) ∫ ظتا ٦ س ء س = ∫ جتا ٦ س/جا ٦ س ء س

= ١/٦ ∫ ٦ جتا ٦ س/جا ٦ س ء س

= ١/٦ لو_هـ |جا ٦ س| + ث

(١٤) ∫ ظا^٣ س ء س = ∫ ظا س ظا^٢ س ء س

= ∫ ظا س (قا^٢ س − ١) ء س

= ∫ (ظا س قا^٢ س − جا س/جتا س) ء س

∵ ء/ءس (ظا س) = قا^٢ س ، ء(جتا س)/ءس = − جا س

∴ التكامل = ١/٢ ظا^٢ س − لو_هـ |جتا س| + ث

حل آخر :

∵ ء/ءس (قا س) = قا س ظا س

∴ التكامل = ١/٢ قا^٢ س − لو_هـ |جتا س| + ث

(١٥) بفرض أن د(س) = س + لو_هـ قا س

∴ دَ(س) = ١ + قا س ظا س/قا س = ١ + ظا س

∴ ∫ (١ + ظا س)/(س + لو_هـ قا س) ء س

= لو_هـ |س + لو_هـ قا س| + ث

(١٦) بفرض أن د(س) = س + لو_هـ جا س

∴ دَ(س) = ١ + جتا س/جا س = ١ + ظتا س

∫ (١ + ظتا س)/(س + لو_هـ جا س) ء س

= لو_هـ |س + لو_هـ جا س| + ث

(١٧) [illegible]

= ١/٢ ∫ قا ٢ س (قا ٢ س + ظا ٢ س)/(قا ٢ س + ظا ٢ س)

بفرض أن د(س) = قا ٢ س + ظا ٢ س

∴ دَ(س) = ٢ قا ٢ س ظا ٢ س + ٢ قا^٢ ٢ س

= ٢ قا ٢ س (قا ٢ س + ظا ٢ س)

∴ ∫ جا ٢ س/جا ٤ س ء س

= ١/٤ لو_هـ |قا ٢ س + ظا ٢ س| + ث

(١٨) بفرض أن د(س) = س^هـ + هـ^س

∴ دَ(س) = هـ س^(هـ−١) + هـ^س

= هـ (س^(هـ−١) + هـ^(س−١))

∴ ∫ (س^(هـ−١) + هـ^(س−١))/(س^هـ + هـ^س) ء س

= ١/هـ ∫ هـ (س^(هـ−١) + هـ^(س−١))/(س^هـ + هـ^س) ء س

= ١/هـ لو |س^هـ + هـ^س| + ث

٧

(١) (جـ)	(٢) (أ)	(٣) (جـ)	(٤) (د)
(٥) (أ)	(٦) (جـ)	(٧) (ب)	(٨) (د)
(٩) (جـ)	(١٠) (د)	(١١) (أ)	(١٢) (جـ)
(١٣) (د)	(١٤) (أ)	(١٥) (ب)	(١٦) (ب)
(١٧) (جـ)	(١٨) (د)	(١٩) (أ)	(٢٠) (أ)
(٢١) (ب)			

٨

ءص/ءس = ٧ − ٢ هـ^س (بتكامل الطرفين بالنسبة إلى س)

ص = ∫ (٧ − ٢ هـ^س) ء س = ٧ س − ٢ هـ^س + ث

∵ د(لو_هـ ٢) = ٣

٣ = ٧ لو_هـ ٢ − ٢ هـ^(لو_هـ ٢) + ث

٣ = ٧ لو_هـ ٢ − ٢ × ٢ + ث

ث = ٧ − ٧ لو_هـ ٢ = ٧ (١ − لو_هـ ٢) = ٧ (لو_هـ (هـ/٢))

∴ د(س) = ٧ س − ٢ هـ^س + ٧ لو_هـ (هـ/٢)

٩

ءص/ءس = ٢ هـ^(−١/٢ س) (بتكامل الطرفين بالنسبة إلى س)

∴ ص = ٢ هـ^(−١/٢ س)/(−١/٢) + ث = −٤ هـ^(−١/٢ س) + ث

∵ د(٠) = ١ ، ١ = −٤ هـ^(−١/٢ (٠)) + ث

∴ ث = ٥ ، ∴ ص = −٤ هـ^(−١/٢ س) + ٥

∴ د(س) = −٤ هـ^(−١/٢ س) + ٥

∴ د(٣) = −٤ هـ^(−١/٢ (٣)) + ٥ = ٥ − ٤ هـ^(−٣/٢)

١٠

ءص/ءس = ١/(٢ س − هـ)

ص = ∫ ١/(٢ س − هـ) ء س = ١/٢ ∫ ٢/(٢ س − هـ) ء س

= ١/٢ لو_هـ |٢ س − هـ| + ث

∴ د(س) = ١/٢ لو_هـ |٢ س − هـ| + ث

، ∵ د(هـ) = ١/٢

∴ ١/٢ = ١/٢ لو_هـ |٢ هـ − هـ| + ث

∴ ١/٢ = ١/٢ لو_هـ |هـ| + ث ∴ ث = صفر

∴ د(س) = ١/٢ لو_هـ |٢ س − هـ|

∴ د(٢ هـ) = ١/٢ لو_هـ |٤ هـ − هـ| = ١/٢ لو_هـ |٣ هـ|

= ١/٢ [لو_هـ هـ + لو_هـ ٣] = ١/٢ (١ + لو_هـ ٣)

١١

ءص/ءس = (٣ س + ٢)/س = ٣ + ٢/س

(بتكامل الطرفين بالنسبة إلى س)

ص = ∫ (٣ + ٢/س) ء س = ٣ س + ٢ لو_هـ |س| + ث

∵ (هـ ، ٣ هـ + ٥) تقع على المنحنى

∴ ٣ هـ + ٥ = ٣ هـ + ٢ + ث ∴ ث = ٣

∴ ص = ٣ س + ٢ لو_هـ |س| + ٣

١٢

ءم/ءن = هـ^(−٠٫١ ن) (بتكامل الطرفين بالنسبة إلى ن)

م = هـ^(−٠٫١ ن)/(−٠٫١) + ث = −١٠ هـ^(−٠٫١ ن) + ث

فى البداية ن = ٠ ، م = ٨٠ سم^٢

∴ ٨٠ = −١٠ × ١ + ث ∴ ث = ٩٠

∴ م = ٩٠ − ١٠ هـ^(−٠٫١ ن) بعد ١٠ ثوان

(م)_(ن=١٠) = (٩٠ − ١٠ هـ^(−١)) سم^٢

١٣

ءم/ءن ∝ ١/ن حيث م هى مبيعات المصنع

∴ ءم/ءن = ك/ن حيث ك ثابت بالتكامل بالنسبة إلى ن

م = ك لو_هـ |ن| + ث

∵ ن ≥ ٠ ∴ م = ك لو_هـ ن + ث

بعد أسبوعين كانت م = ٢٠٠

٢٠٠ = ك لو_هـ ٢ + ث (١)

بعد ٤ أسابيع كانت م = ٣٠٠

٣٠٠ = ك لو_هـ ٤ + ث (٢)

بطرح (٢) − (١)

١٠٠ = ك (لو_هـ ٤ − لو_هـ ٢) = ك لو_هـ ٢

∴ ك = ١٠٠/لو_هـ ٢ بالتعويض فى (٢)

∴ ٣٠٠ = ١٠٠/لو_هـ ٢ × ٢ لو_هـ ٢ + ث ∴ ث = ١٠٠

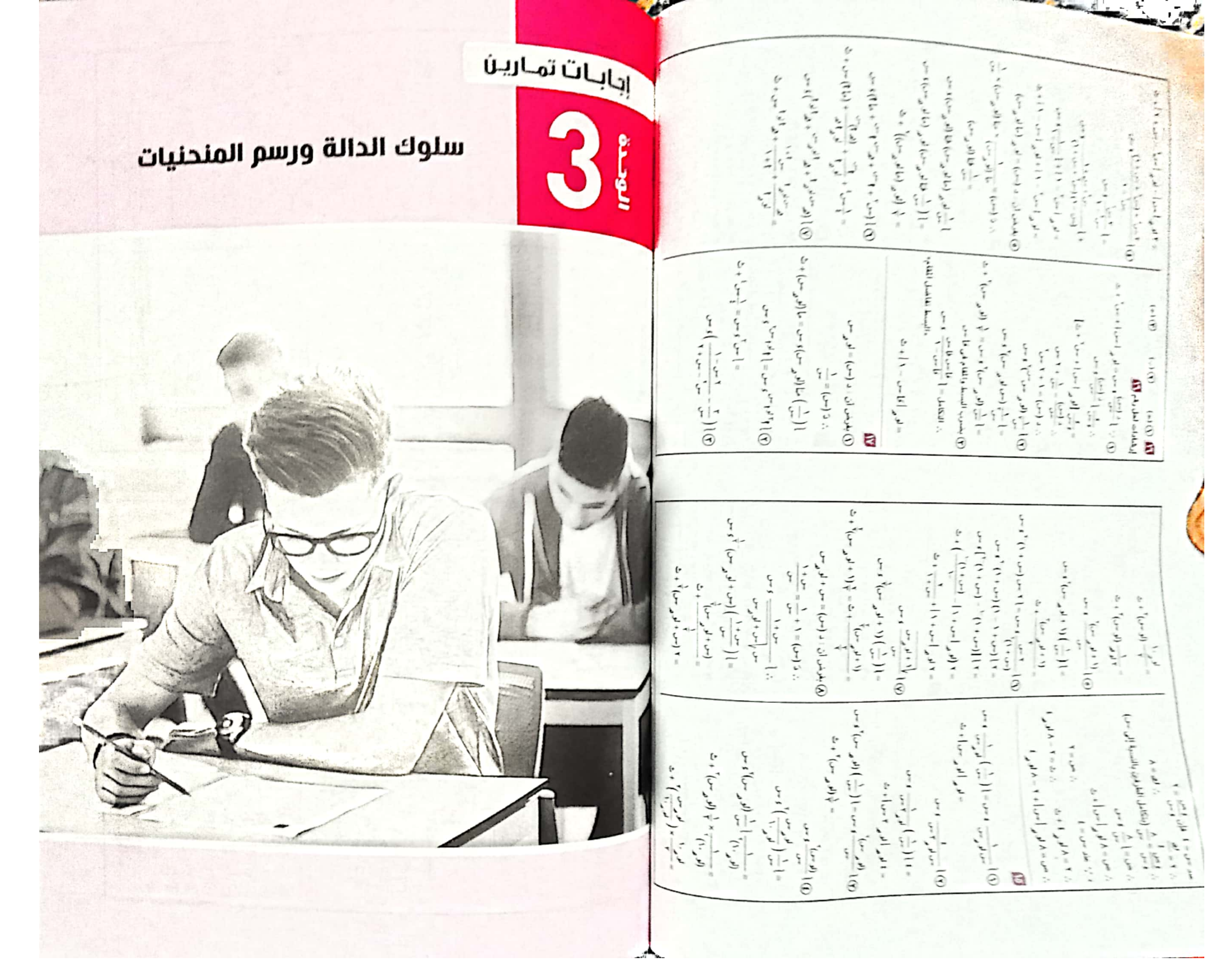
∴ م = ١٠٠ لو_هـ ن/لو_هـ ٢ + ١٠٠ = ١٠٠ لو_٢ ن + ١٠٠

= ١٠٠ (١ + لو_٢ ن)

∴ (م)_(ن=٨) = ١٠٠ (١ + لو_٢ ٨) = ٤٠٠

١٤

ءص/ءس ∝ ١/س ∴ ءص/ءس = ك/س حيث ك ثابت


إجابات تمارين
الوحدة 3
سلوك الدالة ورسم المنحنيات

إجابات تمارين 9

1

① (ب)	② (د)	③ (ب)
④ (أ)	⑤ (ب)	⑥ (ب)
⑦ (ب)	⑧ (ب)	⑨ (ب)
⑩ (جـ)	⑪ (جـ)	⑫ (أ)
⑬ (د)	⑭ (د)	⑮ (جـ)
⑯ (ب)	⑰ (د)	⑱ (جـ)
⑲ (د)	⑳ (أ)	㉑ (أ)

2

① ∵ ص = س^{٢} − ٦ س + ٧

، $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ س − ٦

∵ ص = س^{٢} − ٦ س + ٧

، بوضع $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ ∴ س = ٣

∴ النقطة الحرجة هي (٣ ، −٢)

∴ الدالة متناقصة في]−∞ ، ٣[

، متزايدة في]٣ ، ∞[

② ∵ ص = ١ − ٤ س − س^{٢}

∴ المجال = ح ، $\frac{ءص}{ءس}$ = −٤ − ٢ س

، بوضع $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ ∴ س = −٢

∴ النقطة الحرجة هي (−٢ ، ٥)

∴ الدالة متزايدة في]−∞ ، −٢[

، متناقصة في]−٢ ، ∞[

③ ∵ د (س) = س^{٣} − ١٢ س + ٢

∴ المجال = ح ، دَ (س) = ٣ س^{٢} − ١٢

، بوضع دَ (س) = ٠ ∴ س = ±٢

∴ النقط الحرجة هي (٢ ، −١٤) ، (−٢ ، ١٨)

∴ الدالة متزايدة في كل من]−∞ ، −٢[

،]٢ ، ∞[، متناقصة في]−٢ ، ٢[

④ ∵ د (س) = س^{٣} − ٦ س^{٢} + ٥

∴ المجال = ح

، دَ (س) = ٣ س^{٢} − ١٢ س

، بوضع دَ (س) = ٠

فإن ٣ س^{٢} − ١٢ س = ٠

∴ ٣ س (س − ٤) = ٠

∴ س = ٠ أو ٤

∴ النقط الحرجة هي (٠ ، ٥) ، (٤ ، −٢٧)

∴ الدالة متزايدة في كل من]−∞ ، ٠[

،]٤ ، ∞[، متناقصة في]٠ ، ٤[

⑤ ∵ ص = (س − ٢)^{٢} ∴ مجالها = ح

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ (س − ٢)

، بوضع $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ فإن س = ٢

∴ النقطة الحرجة هي (٢ ، ٠)

∴ الدالة متناقصة في]−∞ ، ٢[

، متزايدة في]٢ ، ∞[

⑥ ∵ د (س) = (س + ١)^{٣} ∴ المجال = ح

، دَ (س) = ٣ (س + ١)^{٢}

، بوضع دَ (س) = ٠ ∴ س = −١

∴ النقطة الحرجة هي (−١ ، ٠)

∴ الدالة متزايدة في ح

⑦ ∵ د (س) = س^{٣} − ٩ س^{٢} + ٢٤ س − ١

∴ مجالها = ح

، دَ (س) = ٣ س^{٢} − ١٨ س + ٢٤

، بوضع دَ (س) = ٠ ∴ س = ٤ أو ٢

∴ النقط الحرجة (٤ ، ١٥) ، (٢ ، ١٩)

∴ الدالة متزايدة في كل من]−∞ ، ٢[

،]٤ ، ∞[، متناقصة في]٢ ، ٤[

⑧ ∵ د (س) = ٩ س − س^{٣} ∴ المجال = ح

، دَ (س) = ٩ − ٣ س^{٢}

، بوضع دَ (س) = ٠ ∴ ٩ − ٣ س^{٢} = ٠

∴ س^{٢} = ٣ ∴ س = $\sqrt{٣}$ أو −$\sqrt{٣}$

∴ النقط الحرجة هي

($\sqrt{٣}$ ، ٦$\sqrt{٣}$) ، (−$\sqrt{٣}$ ، −٦$\sqrt{٣}$)

∴ الدالة متناقصة في كل من]−∞ ، −$\sqrt{٣}$[

،]$\sqrt{٣}$ ، ∞[، متزايدة في]−$\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٣}$[

⑨ ، د (س) = س (س − ٣)^{٢} ∴ مجالها = ح

، د (س) = س (س^{٢} − ٦ س + ٩)

= س^{٣} − ٦ س^{٢} + ٩ س

∴ دَ (س) = ٣ س^{٢} − ١٢ س + ٩

، بوضع دَ (س) = ٠ فإن س = ٣ أو ١

∴ النقط الحرجة هي (١ ، ٤) ، (٣ ، ٠)

∴ الدالة متزايدة في كل من]−∞ ، ١[

،]٣ ، ∞[، متناقصة في]١ ، ٣[

⑩ ، د (س) = س^{٤} + ٤ س ∴ المجال = ح

، دَ (س) = ٤ س^{٣} + ٤

، بوضع دَ (س) = ٠ ∴ ٤ س^{٣} + ٤ = ٠

∴ س = −١

∴ النقطة الحرجة هي (−١ ، −٣)

∴ الدالة متناقصة في]−∞ ، −١[

، متزايدة في]−١ ، ∞[

⑪ ، د (س) = س^{٤} − ٨ س^{٢} − ١٩ ∴ المجال = ح

، دَ (س) = ٤ س^{٣} − ١٦ س

، بوضع دَ (س) = ٠

∴ النقط الحرجة هي

(٠ ، −١٩) ، (٢ ، −٣٥) ، (−٢ ، −٣٥)

∴ الدالة متناقصة في كل من

]−∞ ، −٢[،]٠ ، ٢[

، متزايدة في كل من]−٢ ، ٠[،]٢ ، ∞[

⑫ ∵ د (س) = س^{٥} − ٥ س^{٤} + ١

∴ المجال = ح ، دَ (س) = ٥ س^{٤} − ٢٠ س^{٣}

، بوضع دَ (س) = ٠

∴ ٥ س^{٤} − ٢٠ س^{٣} = ٠

∴ ٥ س^{٣} (س − ٤) = ٠ ∴ س = ٠ أو ٤

∴ النقط الحرجة هي (٠ ، ١) ، (٤ ، −٢٥٥)

∴ الدالة متزايدة في كل من]−∞ ، ٠[

،]٤ ، ∞[، متناقصة في]٠ ، ٤[

⑬ ∵ د (س) = (س^{٢} − ٩)^{٢} ∴ المجال = ح

، دَ (س) = ٢ (س^{٢} − ٩) × ٢ س

= ٤ س (س^{٢} − ٩)

، بوضع دَ (س) = ٠ ∴ س = ٠ أو ٣ أو −٣

∴ النقط الحرجة هي

(٠ ، ٨١) ، (٣ ، ٠) ، (−٣ ، ٠)

∴ الدالة متناقصة في كل من

]−∞ ، −٣[،]٠ ، ٣[

، ومتزايدة في كل من]−٣ ، ٠[،]٣ ، ∞[

⑭ ∵ د (س) = س^{٣} (س − ١)^{٢} ∴ المجال = ح

، دَ (س) = ٣ س^{٢} (س − ١)^{٢} + ٢ (س^{٣}) (س − ١)

= س^{٢} (س − ١) (٣ س − ٣ + ٢ س)

= س^{٢} (س − ١) (٥ س − ٣)

، بوضع دَ (س) = ٠ فإن س = ٠ أو ١ أو $\frac{٣}{٥}$

∴ النقط الحرجة هي (٠ ، ٠) ، (١ ، ٠)

، ($\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{١٠٨}{٣١٢٥}$)

∴ الدالة متزايدة في كل من

]−∞ ، $\frac{٣}{٥}$[،]١ ، ∞[

، متناقصة في]$\frac{٣}{٥}$ ، ١[

⑮ ، د (س) = (س + ٢) (س − ١)^{٢} ∴ المجال = ح

، دَ (س) = (س − ١)^{٢} + ٢ (س + ٢) (س − ١)

= (س − ١) (س − ١ + ٢ س + ٤)

= (س − ١) (٣ س + ٣)

، بوضع دَ (س) = ٠

فإن س = ١ أو −١

∴ النقط الحرجة هي (١ ، ٠) ، (−١ ، ٤)

⑯ ، د (س) = ٥ س^{٦} − ٦ س^{٥} + ١

∴ المجال = ح

، دَ (س) = ٣٠ س^{٥} − ٣٠ س^{٤}

= ٣٠ س^{٤} (س − ١)

، بوضع دَ (س) = ٠ فإن س = ٠ أو ١

∴ النقط الحرجة هي (٠ ، ١) ، (١ ، ٠)

∴ الدالة متناقصة في]−∞ ، ١[

، متزايدة في]١ ، ∞[

⑰ ، د (س) = س^{٤} − ٢ س^{٣} − ٣ س^{٢} + ٤ س

∴ المجال = ح

، دَ (س) = ٤ س^{٣} − ٦ س^{٢} − ٦ س + ٤

، بوضع دَ (س) = ٠

∴ النقط الحرجة هي [illegible]

∴ الدالة متناقصة في كل من

3

② [illegible]

∴ لا توجد نقط حرجة

∴ الدالة متزايدة في كل من

③ [illegible]

∴ النقط الحرجة هي [illegible]

∴ الدالة متزايدة في كل من

، متناقصة في كل من [illegible]

③ د (س) = $\frac{1}{س - 2}$ ∴ المجال = ح − {٢}

، دَ (س) = $\frac{-1}{(س - ٢)^{٢}}$

، ∵ دَ (س) غير معرفة عند س = ٢ ∉ المجال

∴ لا توجد نقط حرجة

∴ الدالة متناقصة في كل من

]− ∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[

④ د (س) = $\sqrt{٢ س − ٣}$ ∴ المجال = [$\frac{٣}{٢}$ ، ∞[

، دَ (س) = $\frac{٢}{٢\sqrt{٢ س − ٣}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٢ س − ٣}}$

، د (س) غير معرفة عند س = $\frac{٣}{٢}$

∴ النقطة ($\frac{٣}{٢}$ ، ٠) هي نقطة حرجة حدية

∴ الدالة متزايدة في]$\frac{٣}{٢}$ ، ∞[

⑤ د (س) = $\sqrt{٤ − س}$ ∴ المجال =]− ∞ ، ٤]

، دَ (س) = $\frac{-١}{٢\sqrt{٤ − س}}$

، ∵ دَ (س) غير معرفة عند س = ٤

∴ النقطة (٤ ، ٠) هي نقطة حرجة حدية

الدالة متناقصة في]− ∞ ، ٤[

⑥ د (س) = $\sqrt[٣]{س − ١}$ ∴ المجال = ح

، دَ (س) = $\frac{١}{٣\sqrt[٣]{(س − ١)^{٢}}}$

، ∵ دَ (س) غير معرفة عند س = ١

∴ النقطة الحرجة (١ ، ٠)

∴ الدالة متزايدة في ح

⑦ د (س) = $\sqrt[٣]{٢ − س}$ ∴ المجال = ح

، دَ (س) = $\frac{-١}{٣\sqrt[٣]{(س − ٢)^{٢}}}$

، ∵ دَ (س) غير معرفة عند س = ٢

∴ النقطة الحرجة هي (٢ ، ٠)

∴ الدالة متناقصة في ح

⑧ ص = $\frac{١}{٢}$ س − $\sqrt[٣]{س}$ ∴ المجال = ح

، $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{١}{٢}$ − $\frac{١}{٣\sqrt[٣]{س^{٢}}}$ = $\frac{\sqrt[٣]{س^{٢}} − ١}{٣\sqrt[٣]{س^{٢}}}$

، بوضع $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ نجد $\sqrt[٣]{س^{٢}}$ = ١

∴ س = ١ أو −١

، $\frac{ءص}{ءس}$ كمية غير معرفة عند س = ٠

∴ النقط الحرجة هي (١ ، $\frac{-١}{٢}$) ، (−١ ، $\frac{١}{٢}$) ، (٠ ، ٠)

∴ الدالة متزايدة في كل من

]− ∞ ، −١[،]١ ، ∞[

، متناقصة في كل من]−١ ، ٠[،]٠ ، ١[

⑨ د (س) = $س^{\frac{٢}{٣}}$ ∴ المجال = ح

، دَ (س) = $\frac{٢}{٣\sqrt[٣]{س}}$

، ∵ دَ (س) غير معرفة عند س = ٠

∴ النقطة الحرجة هي (٠ ، ٠)

∴ الدالة متناقصة في]− ∞ ، ٠[

، ومتزايدة في]٠ ، ∞[

⑩ د (س) = $\sqrt[٣]{(س − ٢)^{٢}}$ ∴ المجال = ح

، دَ (س) = $\frac{٢}{٣\sqrt[٣]{س − ٢}}$

∴ دَ (س) غير معرفة عند س = ٢

∴ النقطة الحرجة (٢ ، ٠)

∴ الدالة متناقصة في]− ∞ ، ٢[

، متزايدة في]٢ ، ∞[

⑪ د (س) = $\sqrt[٣]{(س^{٢} − ١)^{٢}}$ ∴ المجال = ح

، دَ (س) = $\frac{٤ س}{٣\sqrt[٣]{س^{٢} − ١}}$

، دَ (س) = ٠ فإن س = ٠

، دَ (س) غير معرفة عند س = ١ أو −١

∴ النقط الحرجة هي (٠ ، ١) ، (١ ، ٠) ، (−١ ، ٠)

∴ الدالة متزايدة في كل من]−١ ، ٠[،]١ ، ∞[

، متناقصة في كل من]− ∞ ، −١[،]٠ ، ١[

⑫ د (س) = ٣ + ٢ (س − ٢)$^{\frac{١}{٣}}$ ∴ المجال = ح

∴ دَ (س) = ٢ × $\frac{١}{٣}$ (س − ٢)$^{-\frac{٢}{٣}}$

، بوضع دَ (س) = ٠ ∴ س = ٢

∴ النقطة الحرجة هي (٢ ، ٣)

∴ الدالة متزايدة في]− ∞ ، ٢[

، متناقصة في]٢ ، ∞[

⑬ د (س) = ١ + $\frac{١}{س}$ + ...

∴ المجال = ح − { }

، دَ (س) = ...

، دَ (س) غير معرفة عند س = ٠

∴ س = ٠ ∉ المجال

∴ لا توجد نقطة حرجة

∴ الدالة متزايدة في كل من

]− ∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[

⑭ د (س) = س + $\frac{١}{س}$ ∴ المجال = ح − {٠}

، دَ (س) = ١ − $\frac{١}{س^{٢}}$ = $\frac{س^{٢} − ١}{س^{٢}}$

، بوضع دَ (س) = ٠ فإن س = ١ أو −١

، دَ (س) غير معرفة عند س = ٠ ∉ المجال

∴ النقط الحرجة (١ ، ٢) ، (−١ ، −٢)

، متناقصة في كل من]−١ ، ٠[،]٠ ، ١[

⑮ د (س) = $\sqrt{س}$ − $\frac{١}{\sqrt{س}}$

∴ المجال =]٠ ، ∞[

∴ دَ (س) = $\frac{١}{٢}$ $س^{-\frac{١}{٢}}$ + $\frac{١}{٢}$ $س^{-\frac{٣}{٢}}$

= $\frac{١}{٢}$ $س^{-\frac{٣}{٢}}$ [س + ١] = $\frac{س + ١}{٢\sqrt{س^{٣}}}$

، بوضع دَ (س) = ٠ فإن س = −١ ∉ المجال

، ∵ دَ (س) غير معرفة عند س = ٠ ∉ المجال

∴ النقط الحرجة غير موجودة

∴ الدالة متزايدة في]٠ ، ∞[

⑯ د (س) = $\frac{س^{٢} + س − ٢}{س^{٢} − ١}$

= $\frac{(س + ٢)(س − ١)}{(س + ١)(س − ١)}$

∴ المجال = ح − {١ ، −١}

، د (س) = $\frac{(س + ٢)}{(س + ١)}$

∴ دَ (س) = $\frac{(س + ١)(١) − (س + ٢)(١)}{(س + ١)^{٢}}$

= $\frac{−١}{(س + ١)^{٢}}$

، ∵ دَ (س) غير معرفة عند س = −١ ∉ المجال

∴ لا توجد نقط حرجة

∴ الدالة متناقصة في كل من :

]− ∞ ، −١[،]−١ ، ١[،]١ ، ∞[

⑰ ...

، دَ (س) = $\frac{(س^{٢} + ١)(١) − س (٢ س)}{(س^{٢} + ١)^{٢}}$

= $\frac{١ − س^{٢}}{(س^{٢} + ١)^{٢}}$

، بوضع دَ (س) = ٠

∴ س = ١ أو −١

∴ النقط الحرجة هي (١ ، $\frac{١}{٢}$) ، (−١ ، $\frac{−١}{٢}$)

∴ الدالة متناقصة في كل من

]− ∞ ، −١[،]١ ، ∞[

، الدالة متزايدة في]−١ ، ١[

⑱ د (س) = $\sqrt{٩ − س^{٢}}$

∴ المجال = [−٣ ، ٣]

∴ دَ (س) = $\frac{− س}{\sqrt{٩ − س^{٢}}}$ ، بوضع دَ (س) = ٠

∴ س = ٠

، دَ (س) غير معرفة عند س = ٣ أو −٣

∴ النقطة (٠ ، ٣) هي نقطة حرجة

، النقط (٣ ، ٠) ، (−٣ ، ٠) هي نقط حرجة حدية

∴ الدالة متزايدة في]−٣ ، ٠[

ومتناقصة في]٠ ، ٣[

⑲ ...

، بوضع دَ (س) = ٠ ∴ س = ٢ ∉ المجال

، ∵ دَ (س) غير معرفة عند س^{٢} − ٤ س + ٣ = ٠

∴ (س − ٣) (س − ١) = ٠

س = ٣ أو ١

∴ النقط (٣ ، ٠) ، (١ ، ٠) هي نقط حرجة حدية

∴ الدالة متناقصة في]− ∞ ، ١[

، ومتزايدة في]٣ ، ∞[

⑳ د (س) = | س − ٣ | + ٢

∴ المجال = ح

، د (س) = { س − ٣ + ٢ ، س ≥ ٣ ؛ − س + ٣ + ٢ ، س < ٣ }

= { س − ١ ، س ≥ ٣ ؛ − س + ٥ ، س < ٣ }

∴ دَ (س) = { ١ ، س > ٣ ؛ −١ ، س < ٣ }

، ∵ دَ (٣$^{+}$) ≠ دَ (٣$^{-}$)

∴ دَ (س) = { ١ ، س > ٣ ؛ غير موجودة ، س = ٣ ؛ −١ ، س < ٣ }

دَ (س) غير موجودة عند س = ٣

∴ النقطة الحرجة هي (٣ ، ٢)

الدالة متناقصة في]− ∞ ، ٣[

، ومتزايدة في]٣ ، ∞[

㉑ ...

∴ د (س) = { ... ، س ≥ ٢ ؛ ... ، س < ٢ }

، دَ (س) = { −١ ، س > ٢ ؛ ١ ، س < ٢ }

، دَ (٢$^{+}$) ≠ دَ (٢$^{-}$)

∴ دَ (س) = { −١ ، س > ٢ ؛ غير معرفة ، س = ٢ ؛ ١ ، س < ٢ }

∴ دَ (س) غير موجودة عند س = ٢

∴ النقطة الحرجة هي (٢ ، ٣)

∴ الدالة متزايدة في]− ∞ ، ٢[

، متناقصة في]٢ ، ∞[

㉒ د (س) = ٢ − $\sqrt{س^{٢} − ٦ س + ٩}$

∴ المجال = ح

، د (س) = ٢ − | س − ٣ |

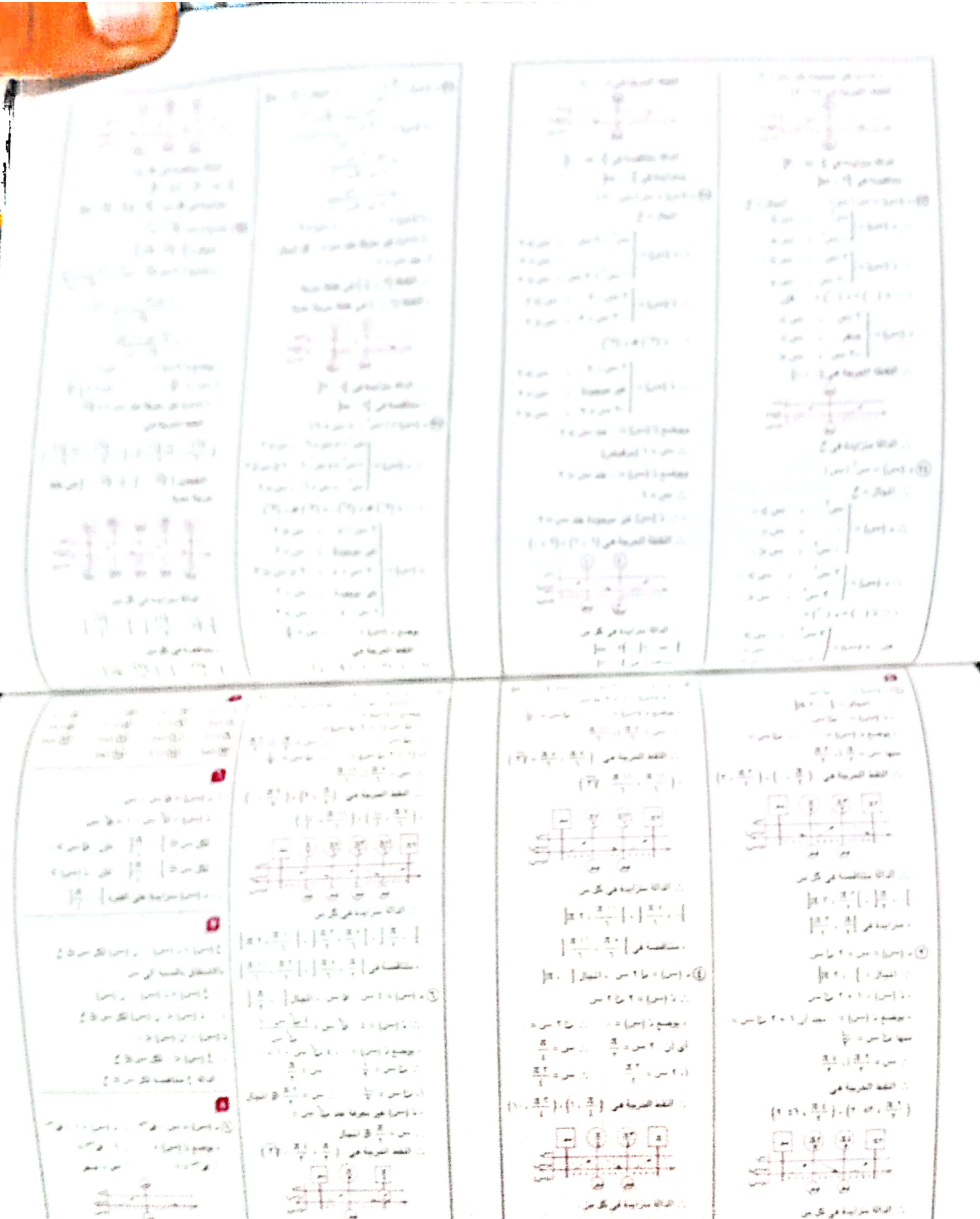
∴ د (س) = { ٢ − (س − ٣) ، س ≥ ٣ ؛ ٢ + (س − ٣) ، س < ٣ }

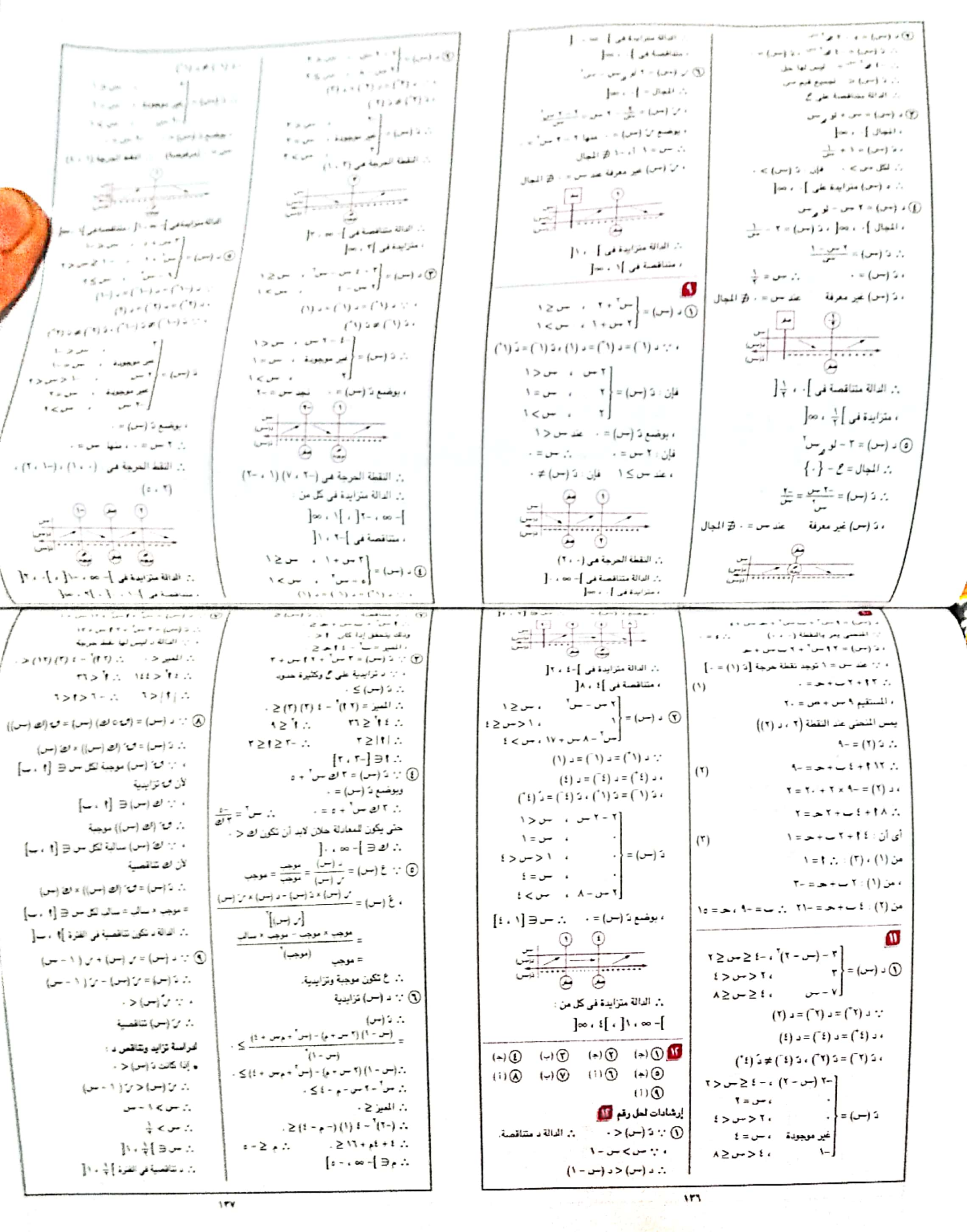
∴ د (س) = { − س + ٥ ، س ≥ ٣ ؛ س − ١ ، س < ٣ }

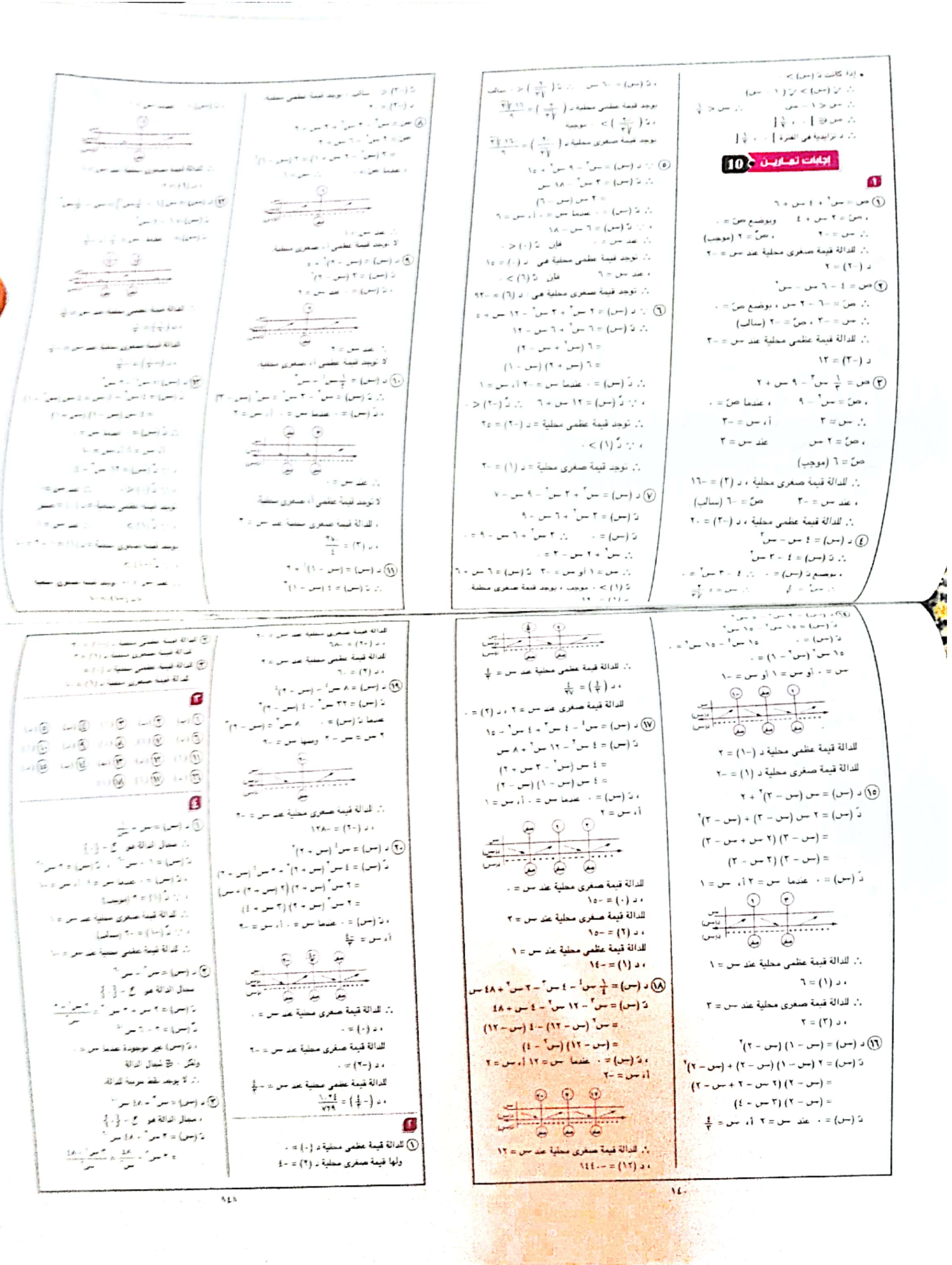
∴ دَ (س) = { −١ ، س > ٣ ؛ ١ ، س < ٣ }

، ∵ دَ (٣$^{+}$) ≠ دَ (٣$^{-}$)

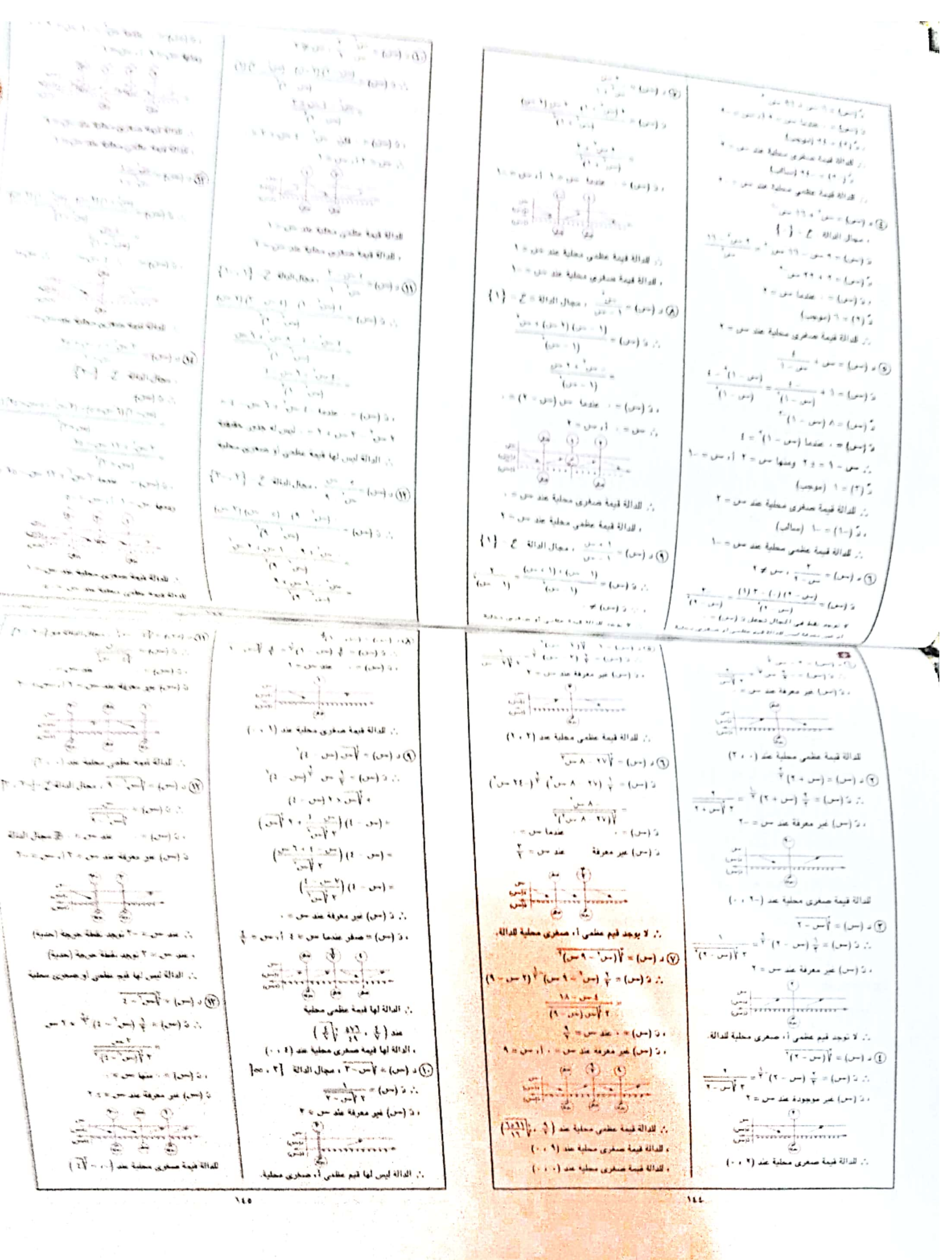
∴ دَ (س) = { −١ ، س > ٣ ؛ غير موجودة ، س = ٣ ؛ ١ ، س < ٣ }







إجابات تمارين 10



$\therefore$ د$''$(س) = ٦ س + ٤٨ س$^{-٤}$

$\therefore$ د$'$(س) = ٠ عندما س = ٢ أو س = −٢

$\therefore$ د$''$(٢) = ٢٤ (موجب)

$\therefore$ الدالة قيمة صغرى محلية عند س = ٢

د$''$(−٢) = −٢٤ (سالب)

$\therefore$ الدالة قيمة عظمى محلية عند س = −٢

④ د(س) = س^{٣} + $\frac{١٦}{س}$

، مجال الدالة ح − {٠}

$\therefore$ د$'$(س) = ٣ س^{٢} − ١٦ س$^{-٢}$ = $\frac{٣ س^{٤} - ١٦}{س^{٢}}$

د$''$(س) = ٦ س + ٣٢ س$^{-٣}$

، د$'$(س) = ٠ عندما س = ٢

د$''$(٢) = ٦ (موجب)

$\therefore$ الدالة قيمة صغرى محلية عند س = ٢

⑤ د(س) = س + $\frac{٤}{س - ١}$

$\therefore$ د$'$(س) = ١ + $\frac{-٤}{(س - ١)^{٢}}$ = $\frac{(س - ١)^{٢} - ٤}{(س - ١)^{٢}}$

د$''$(س) = ٨ (س − ١)$^{-٣}$

د$'$(س) = ٠ عندما (س − ١)^{٢} = ٤

$\therefore$ س − ١ = ± ٢ ومنها س = ٣ أو س = −١

د$''$(٣) = ١ (موجب)

$\therefore$ الدالة قيمة صغرى محلية عند س = ٣

، د$''$(−١) = −١ (سالب)

$\therefore$ الدالة قيمة عظمى محلية عند س = −١

⑥ د(س) = $\frac{٣}{س - ٢}$ ، س ≠ ٢

$\therefore$ د$'$(س) = $\frac{(س - ٢)(٠) - ٣(١)}{(س - ٢)^{٢}}$ = $\frac{-٣}{(س - ٢)^{٢}}$

$\therefore$ لا توجد نقط في المجال تجعل د$'$(س) = ٠ أو غير معرفة ليس للدالة قيم عظمى أو صغرى محلية

⑧ د(س) = $\frac{س^{٢}}{١ - س}$ ، مجال الدالة = ح − {١}

$\therefore$ د$'$(س) = $\frac{(١ - س)(٢ س) + س^{٢}}{(١ - س)^{٢}}$ = $\frac{٢ س - س^{٢}}{(١ - س)^{٢}}$

$\therefore$ د$'$(س) = ٠ عندما س (٢ − س) = ٠

$\therefore$ س = ٠ أو س = ٢

$\therefore$ الدالة قيمة صغرى محلية عند س = ٠

، الدالة قيمة عظمى محلية عند س = ٢

⑨ د(س) = $\frac{١ + س}{١ - س}$ ، مجال الدالة ح − {١}

$\therefore$ د$'$(س) = $\frac{(١ - س) + (١ + س)}{(١ - س)^{٢}}$ = $\frac{٢}{(١ - س)^{٢}}$

$\therefore$ د$'$(س) ≠ ٠

$\therefore$ ليس للدالة قيمة عظمى أو صغرى محلية

---

① د(س) = ٢ − س$^{\frac{٢}{٣}}$

$\therefore$ د$'$(س) = $-\frac{٢}{٣}$ س$^{-\frac{١}{٣}}$ = $\frac{-٢}{٣ \sqrt[٣]{س}}$

، د$'$(س) غير معرفة عند س = ٠

للدالة قيمة عظمى محلية عند (٠ ، ٢)

② د(س) = (س + ٢)$^{\frac{٢}{٣}}$

$\therefore$ د$'$(س) = $\frac{٢}{٣}$ (س + ٢)$^{-\frac{١}{٣}}$ = $\frac{٢}{٣ \sqrt[٣]{س + ٢}}$

، د$'$(س) غير معرفة عند س = −٢

للدالة قيمة صغرى محلية عند (−٢ ، ٠)

③ د(س) = $\sqrt[٣]{س - ٢}$

$\therefore$ د$'$(س) = $\frac{١}{٣}$ (س − ٢)$^{-\frac{٢}{٣}}$ = $\frac{١}{٣ \sqrt[٣]{(س - ٢)^{٢}}}$

، د$'$(س) غير معرفة عند س = ٢

$\therefore$ لا توجد قيم عظمى أو صغرى محلية للدالة.

④ د(س) = $\sqrt[٣]{(س - ٢)^{٢}}$

$\therefore$ د$'$(س) = $\frac{٢}{٣}$ (س − ٢)$^{-\frac{١}{٣}}$ = $\frac{٢}{٣ \sqrt[٣]{س - ٢}}$

، د$'$(س) غير موجودة عند س = ٢

$\therefore$ للدالة قيمة صغرى محلية عند (٢ ، ٠)

⑤ د(س) = ١ − $\sqrt[٣]{(س - ٢)^{٢}}$

$\therefore$ د$'$(س) = $-\frac{٢}{٣}$ (س − ٢)$^{-\frac{١}{٣}}$

، د$'$(س) غير معرفة عند س = ٢

$\therefore$ للدالة قيمة عظمى محلية عند (٢ ، ١)

⑥ د(س) = $\sqrt[٣]{٢٧ - ٨ س^{٣}}$

د$'$(س) = $\frac{١}{٣}$ (٢٧ − ٨ س^{٣})$^{-\frac{٢}{٣}}$ (−٢٤ س^{٢})

= $\frac{-٨ س^{٢}}{\sqrt[٣]{(٢٧ - ٨ س^{٣})^{٢}}}$

د$'$(س) = ٠ عندما س = ٠

د$'$(س) غير معرفة عند س = $\frac{٣}{٢}$

$\therefore$ لا يوجد قيم عظمى أو صغرى محلية للدالة.

⑦ د(س) = $\sqrt[٣]{(س^{٢} - ٩ س)^{٢}}$

$\therefore$ د$'$(س) = $\frac{٢}{٣}$ (س^{٢} − ٩ س)$^{-\frac{١}{٣}}$ (٢ س − ٩)

= $\frac{٤ س - ١٨}{٣ \sqrt[٣]{س (س - ٩)}}$

، د$'$(س) = ٠ عند س = $\frac{٩}{٢}$

، د$'$(س) غير معرفة عند س = ٠ ، س = ٩

$\therefore$ للدالة قيمة عظمى محلية عند ($\frac{٩}{٢}$ ، $\sqrt[٣]{\frac{٦٥٦١}{١٦}}$)

، للدالة قيمة صغرى محلية عند (٩ ، ٠)

، للدالة قيمة صغرى محلية عند (٠ ، ٠)

⑧ د(س) = ...

$\therefore$ د$'$(س) = $\frac{٤}{٣}$ (س − ١)$^{\frac{١}{٣}}$

، د$'$(س) = ٠ عند س = ١

$\therefore$ الدالة قيمة صغرى محلية عند (١ ، ٠)

⑨ د(س) = $\sqrt[٣]{س}$ (س − ٤)^{٢}

$\therefore$ د$'$(س) = $\frac{١}{٣}$ س$^{-\frac{٢}{٣}}$ (س − ٤)^{٢} + $\sqrt[٣]{س}$ × ٢ (س − ٤)

= (س − ٤) ($\frac{س - ٤}{٣ \sqrt[٣]{س^{٢}}}$ + ٢ $\sqrt[٣]{س}$)

= (س − ٤) ($\frac{س - ٤ + ٦ س}{٣ \sqrt[٣]{س^{٢}}}$)

= (س − ٤) ($\frac{٧ س - ٤}{٣ \sqrt[٣]{س^{٢}}}$)

$\therefore$ د$'$(س) غير معرفة عند س = ٠

، د$'$(س) = صفر عندما س = ٤ أو س = $\frac{٤}{٧}$

$\therefore$ الدالة لها قيمة عظمى محلية

عند ($\frac{٤}{٧}$ ، $\frac{٥٧٦}{٤٩}$ $\sqrt[٣]{\frac{٤}{٧}}$)

، الدالة لها قيمة صغرى محلية عند (٤ ، ٠)

⑩ د(س) = $\sqrt{س - ٣}$ ، مجال الدالة [٣ ، ∞[

$\therefore$ د$'$(س) = $\frac{١}{٢ \sqrt{س - ٣}}$

، د$'$(س) غير معرفة عند س = ٣

$\therefore$ الدالة ليس لها قيم عظمى أ، صغرى محلية.

⑪ ...

$\therefore$ الدالة قيمة عظمى محلية عند (٠ ، ٣)

⑫ د(س) = $\sqrt{س^{٢} - ٩}$ ، مجال الدالة ح −]−٣ ، ٣[

$\therefore$ د$'$(س) = $\frac{س}{\sqrt{س^{٢} - ٩}}$

، د$'$(س) = ٠ عند س = ٠ ∉ مجال الدالة

د$'$(س) غير معرفة عند س = ٣ أو س = −٣

$\therefore$ عند س = −٣ توجد نقطة حرجة (حدية)

، عند س = ٣ توجد نقطة حرجة (حدية)

$\therefore$ الدالة ليس لها قيم عظمى أو صغرى محلية

⑬ د(س) = $\sqrt[٣]{س^{٢} - ٤}$

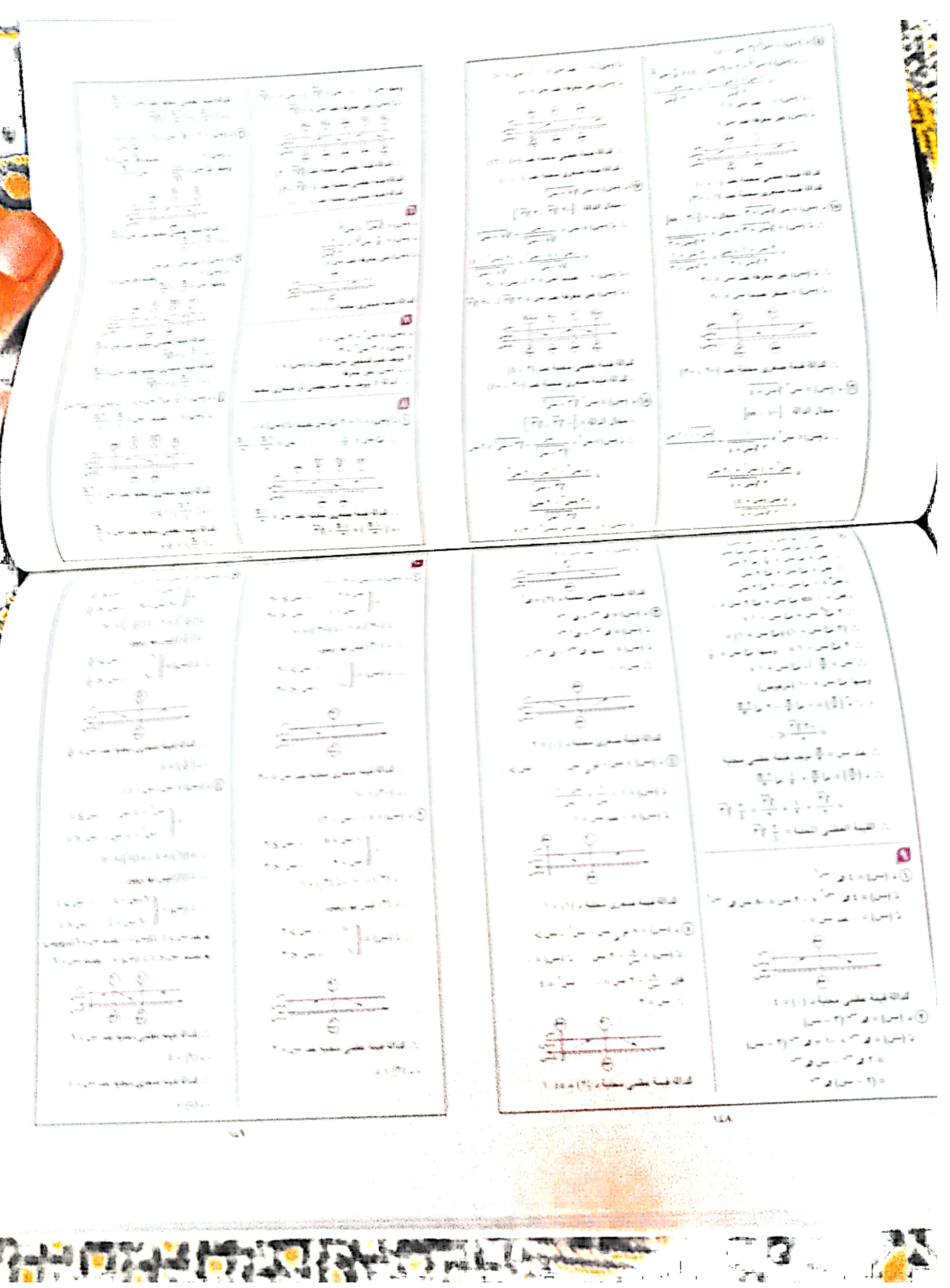
$\therefore$ د$'$(س) = $\frac{١}{٣}$ (س^{٢} − ٤)$^{-\frac{٢}{٣}}$ × ٢ س

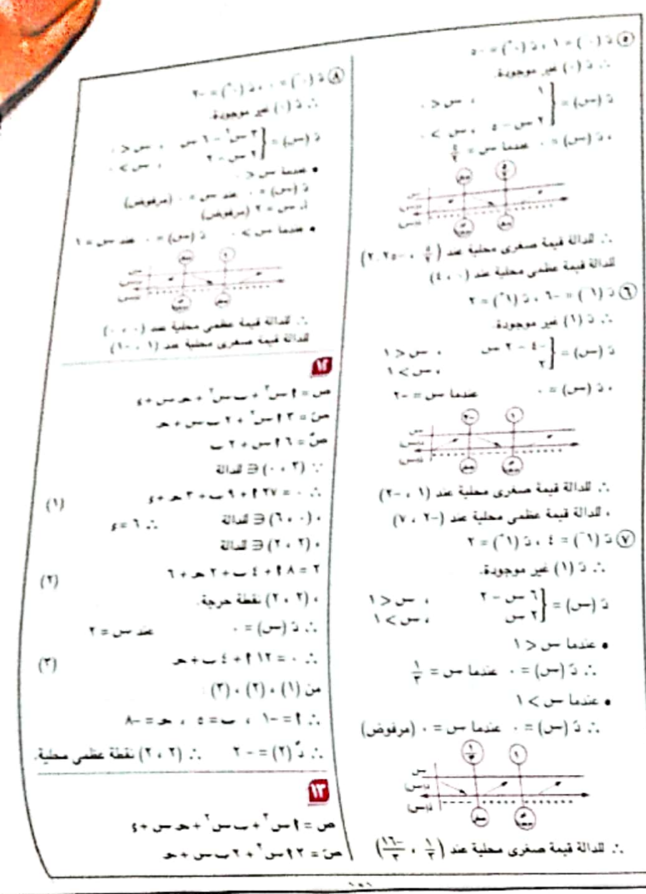
= $\frac{٢ س}{٣ \sqrt[٣]{(س^{٢} - ٤)^{٢}}}$

، د$'$(س) = ٠ منها س = ٠

د$'$(س) غير معرفة عند س = ± ٢

للدالة قيمة صغرى محلية عند (٠ ، −$\sqrt[٣]{٤}$)







صً = ٦ أ س + ٢ ب

∵ (−٣ ، ٢) نقطة حرجة

∴ دَ (س) = ٠ عند س = −٣

٠ = ٢٧ أ − ٦ ب + جـ (١)

، (−٣ ، ٢) ∈ للدالة

∴ ٢ = −٢٧ أ + ٩ ب − ٣ جـ + ء (٢)

∴ (−١ ، −١) نقطة حرجة

∴ دَ (س) = ٠ عند س = −١

٠ = ٣ أ − ٢ ب + جـ (٣)

(−١ ، −١) ∈ للدالة

∴ −١ = −أ + ب − جـ + ء (٤)

من (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) :

∴ أ = ١ ، ب = ٦ ، جـ = ٩ ، ء = ٣

دً (−١) = ٦ (موجب) ∴ نقطة صغرى محلية.

دً (−٣) = −٦ (سالب) ∴ نقطة عظمى محلية.

١٤

ص = أ س^٣ + ب س^٢ + جـ س + ء

صَ = ٣ أ س^٢ + ٢ ب س + جـ

صً = ٦ أ س + ٢ ب

(٠ ، ٠) ∈ للدالة ∴ ء = ٠

عند س = ٣ نقطة حرجة

∴ ٠ = ٢٧ أ + ٦ ب + جـ (١)

، ميل المماس = ٤ عند س = ١

∴ ٣ أ + ٢ ب + جـ = ٤ (٢)

، دالة لها قيمة عظمى محلية عند س = ٢

∴ ٠ = ١٢ أ + ٤ ب + جـ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) :

∴ أ = $\frac{٢}{٣}$ ، ب = −٥ ، جـ = ١٢

١٥ ① (جـ) ② (جـ) ③ (جـ) ④ (أ)

إرشادات لحل رقم **١٥**

① ∵ ص = س^س ∴ لوهـ ص = س لوهـ س

∴ $\frac{١}{ص}$ × صَ = س × $\frac{١}{س}$ + لوهـ س

= ١ + لوهـ س

∴ صَ = ص (١ + لوهـ س) = س^س (١ + لوهـ س)

عند نقطة التوقف للدالة يكون صَ = ٠

∴ س^س (١ + لوهـ س) = ٠

∴ لوهـ س = −١ ∴ س = هـ^{−١} = $\frac{١}{هـ}$

② ∵ د (س) = س + $\frac{١}{س}$

∴ دَ (س) = ١ − $\frac{١}{س^٢}$

بوضع دَ (س) = ٠ ∴ س^٢ = ١

∴ س = ±١

∴ عند س = −١ توجد قيمة عظمى للدالة

، عند س = ١ توجد قيمة صغرى للدالة

∴ أ = −١ ، ب = ١

∴ د (أ) = د (−١) = −٢ ، د (ب) = د (١) = ٢

∴ د (أ) < د (ب)

③ ∵ د (س) = ظا س − س

∴ دَ (س) = قا^٢ س − ١ = ظا^٢ س

بوضع دَ (س) = ٠ ∴ ظا^٢ س = ٠

∴ س = ن π حيث ن ∈ ص

∴ الدالة تزايدية على الدوام ولها عدد لا نهائى من النقط الحرجة وليس لها قيم عظمى أو صغرى محلية.

④ ∵ د (س) = لوهـ ن (س)

∴ ن (س) = هـ^{د (س)}

∴ نَ (س) = هـ^{د (س)} × دَ (س)

وبوضع نَ (س) = ٠

∴ دَ (س) = ٠

∴ س = ٢٠١٩ ، أو ٢٠٢٠ ، أو ٢٠٢١ ، أو ٢٠٢٢

∴ عند س = ٢٠١٩ توجد قيمة عظمى للدالة ن (س)

∴ القيمة العظمى المحلية هى د (٢٠١٩)

١٦

① د (س) =
- (س − ٣)(س − ٥) ، س ≥ ٥
- −(س − ٣)(س − ٥) ، ٣ ≤ س < ٥
- (س − ٣)(س − ٥) ، س < ٣

∵ دَ (٥^+) = ٢ ، دَ (٥^−) = −٢

∴ دَ (٥) غير موجودة

، دَ (٣^+) = ٢ ، دَ (٣^−) = −٢

∴ دَ (٣) غير موجودة.

دَ (س) =
- ٢ س − ٨ ، س > ٥
- −٢ س + ٨ ، ٣ < س < ٥
- ٢ س − ٨ ، س < ٣

، دَ (س) = ٠ عندما س = ٤

∴ الدالة قيمة عظمى محلية عند س = ٤

، د (٤) = ١

∴ الدالة قيمة صغرى محلية عند س = ٥

، د (٥) = ٠

∴ الدالة قيمة صغرى محلية عند س = ٣

، د (٣) = ٠

② د (س) =
- س^٢ − ٤ س + ٣ ، س ≤ ٣
- ٢ س − ٦ ، ٣ < س < ٤
- −س + ٦ ، ٤ ≤ س < ٦
- س − ٦ ، س ≥ ٦

دَ (٣^−) = ٢ ، دَ (٣^+) = ٢ ∴ دَ (٣) = ٢

، دَ (٤^−) = ٢ ، دَ (٤^+) = −١

∴ دَ (٤) غير موجودة

، دَ (٦^−) = −١ ، دَ (٦^+) = ١

∴ دَ (٦) غير موجودة.

دَ (س) =
- ٢ س − ٤ ، س < ٣
- ٢ ، ٣ ≤ س < ٤
- −١ ، ٤ < س < ٦
- ١ ، س > ٦

، دَ (س) = ٠ عندما س = ٢

∴ الدالة قيمة صغرى محلية عند (٦ ، ٠)

الدالة قيمة صغرى محلية عند (٢ ، −١)

الدالة قيمة عظمى محلية عند (٤ ، ٢)

③ دَ (١^−) = ٢ ، دَ (١^+) = ٠ ∴ دَ (١) غير موجودة.

، دَ (٤^−) = ٠ ، دَ (٤^+) = −١

∴ د (١) غير موجودة

[illegible]

∴ للدالة قيمة عظمى محلية عند س = ١ ، د (١) = ٢

لكل س ∈]١ ، ٤[حيث دَ (س) = ٠ هي نقط حرجة عندها قيمة عظمى وصغرى محلية في نفس الوقت.

④ دَ (-1^{-}) = -٢ ، دَ (-1^{+}) = ٠

∴ دَ (-١) غير موجودة.

دَ (2^{-}) = ٠ ، دَ (2^{+}) = ٤

∴ دَ (٢) غير موجودة.

دَ (س) = { ٢ س ، س < -١ ؛ ٠ ، -١ < س < ٢ ؛ ٤ ، س > ٢ }

، دَ (س) = ٠ عندما س ∈]-١ ، ٢[

∴ للدالة قيمة صغرى محلية عند س = -١

، د (-١) = ٢

للدالة قيمة صغرى محلية عند س = ٢ ، د (٢) = ٢

لكل س ∈]-١ ، ٢[حيث دَ (س) = ٠ هي نقط حرجة عندها قيمة عظمى وصغرى محلية في نفس الوقت.

⑰ بحل المعادلتين

[illegible]

∴ نقطة التماس هي (٢ ، -١) بالنسبة للدالة د

∴ للدالة د١ قيمة صغرى محلية عند س = ٢ بالنسبة للدالة د١

∴ للدالة د٢ قيمة عظمى محلية عند س = ٢

إجابات تمارين 11

1

① د (س) = س^{٢} - ٦ س + ١٢

∴ دَ (س) = ٢ س - ٦

، دَ (س) = ٠ عندما س = ٣ ∈ [-١ ، ٥]

، ∵ د (-١) = ٢٠ ، د (٣) = ٤ ، د (٥) = ٨

∴ القيمة العظمى المطلقة هي ٢٠

وتبلغها الدالة عند س = -١

، القيمة الصغرى المطلقة هي ٤ وتبلغها الدالة عند س = ٣

[illegible]

ولها قيمة صغرى مطلقة = -٩ وتبلغها عند س = صفر

④ د (س) = س^{٤} + ٢ ∴ دَ (س) = ٤ س^{٣}

، دَ (س) = ٠ عند س = ٠ ∈ [-١ ، ٢]

، ∵ د (-١) = ٣ ، د (٠) = ٢ ، د (٢) = ١٨

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ١٨ وتبلغها عند س = ٢

ولها قيمة صغرى مطلقة = ٢ وتبلغها عند س = صفر

⑤ د (س) = س (س^{٢} - ١٢) = س^{٣} - ١٢ س

∴ دَ (س) = ٣ س^{٢} - ١٢

، دَ (س) = ٠

عند س = ٢ ∈ [-١ ، ٤]

أ، س = -٢ ∉ [-١ ، ٤]

، ∵ د (-١) = ١١ ، د (٢) = -١٦

، د (٤) = ١٦

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ١٦ وتبلغها عند س = ٤

ولها قيمة صغرى مطلقة = -١٦ وتبلغها عند س = ٢

[illegible]

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ١٩

وتبلغها عند س = ٢

ولها قيمة صغرى مطلقة = [illegible]

⑧ د (س) = س^{٣} - ٩ س^{٢} + ١٥ س

∴ دَ (س) = ٣ س^{٢} - ١٨ س + ١٥

= ٣ (س^{٢} - ٦ س + ٥)

، دَ (س) = ٠ عند س = ٥ ∉ [-٢ ، ٤]

أ، س = ١ ∈ [-٢ ، ٤]

، ∵ د (-٢) = -٧٤ ، د (١) = ٧

، د (٤) = -٢٠

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٧ وتبلغها عند س = ١

ولها قيمة صغرى مطلقة = -٧٤ وتبلغها عند س = -٢

⑨ د (س) = س^{٣} + س^{٢} - ٨ س - ٥

∴ دَ (س) = ٣ س^{٢} + ٢ س - ٨

، دَ (س) = ٠

عند س = $\frac{٤}{٣}$ ∈ [-$\sqrt{٢}$ ، ٠]

[illegible]

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = $\frac{٦٢}{٢٧}$ وتبلغها عند س = $\frac{٥}{٣}$

ولها قيمة صغرى مطلقة = -٥ تبلغها عند س = ٠

⑩ ص = ٢ س^{٣} + ٣ س^{٢} - ١٢ س + ١

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٦ س^{٢} + ٦ س - ١٢

= ٦ (س^{٢} + س - ٢)

، $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

عند س = -٢ ∉ [-١ ، ٥]

أ، س = ١ ∈ [-١ ، ٥]

، ∵ د (-١) = ١٤ ، د (١) = -٦ ، د (٥) = ٢٦٦

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٢٦٦

وتبلغها عند س = ٥

ولها قيمة صغرى مطلقة = -٦ وتبلغها عند س = ١

⑪ ص = ٢ س^{٣} + ٣ س^{٢} + ١

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٦ س^{٢} + ٦ س = ٦ س (س + ١)

، $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ عند س = ٠ ∈ [-١٠ ، ١٢]

، س = -١ ∈ [-١٠ ، ١٢]

، ∵ د (-١٠) = -١٦٩٩ ، د (-١) = ٢

، د (٠) = ١ ، د (١٢) = ٣٨٨٩

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٣٨٨٩

وتبلغها عند س = ١٢

ولها قيمة صغرى مطلقة = -١٦٩٩

وتبلغها عند س = -١٠

⑫ د (س) = (س - ١) (س - ٢)^{٢}

∴ دَ (س) = (س - ١) × ٢ (س - ٢) + (س - ٢)^{٢}

= (س - ٢) (٣ س - ٤)

، دَ (س) = ٠

[illegible]

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٣٦

وتبلغها عند س = ٥

ولها قيمة صغرى مطلقة = -٤ وتبلغها عند س = ٠

⑬ د (س) = ٢ س - ٣ س$^{\frac{٢}{٣}}$

∴ دَ (س) = ٢ - ٢ س$^{-\frac{١}{٣}}$ = ٢ - $\frac{٢}{\sqrt[٣]{س}}$

، دَ (س) = ٠ عند س = ١ ∈ [-١ ، ٣]

، دَ (س) غير معرفة عند س = ٠ ∈ [-١ ، ٣]

، ∵ د (-١) = -٥ ، د (٠) = ٠ ، د (١) = -١

، د (٣) = ٦ - ٣ × $\sqrt[٣]{٩}$ = -٠,٢٤

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = صفر

وتبلغها عند س = ٠

ولها قيمة صغرى مطلقة = -٥ وتبلغها عند س = -١

⑭ د (س) = ٣ س^{٤} - ٤ س^{٣}

∴ دَ (س) = ١٢ س^{٣} - ١٢ س^{٢}

= ١٢ س^{٢} (س - ١)

، دَ (س) = ٠

عند س = ٠ ∈ [-١ ، ٢]

، س = ١ ∈ [-١ ، ٢]

، ∵ د (-١) = ٧ ، د (٠) = ٠

، د (١) = -١ ، د (٢) = ١٦

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ١٦

وتبلغها عند س = ٢

ولها قيمة صغرى مطلقة = -١ وتبلغها عند س = ١

⑮ د (س) = ٢ س^{٤} - س^{٢} + ١

∴ دَ (س) = ٨ س^{٣} - ٢ س

= ٢ س (٤ س^{٢} - ١)

[illegible]

، دَ (س) = ٠ عند س = ٢ ∈ [١ ، ٦]

أ، س = -٢ ∉ [١ ، ٦]

، دَ (س) غير معرفة عند س = ٠ ∉ [١ ، ٦]

، ∵ د (١) = ١٠ ، د (٢) = ٦ ، د (٦) = $\frac{٢٠}{٣}$

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ١٠

وتبلغها عند س = ١

ولها قيمة صغرى مطلقة = ٦ وتبلغها عند س = ٢

③ د (س) = $\frac{٤ س}{س^{٢} + ١}$

دَ (س) = $\frac{(س^{٢} + ١) (٤) - (٤ س) (٢ س)}{(س^{٢} + ١)^{٢}}$

= $\frac{-٤ س^{٢} + ٤}{(س^{٢} + ١)^{٢}}$

∴ دَ (س) = ٠ عند س = ١ ∈ [-١ ، ٣]

أ، س = -١ ∈ [-١ ، ٣]

، ∵ د (-١) = -٢ ، د (١) = ٢

، د (٣) = $\frac{٦}{٥}$

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٢ وتبلغها عند س = ١

ولها قيمة صغرى مطلقة = -٢ وتبلغها عند س = -١

④ د (س) = س + $\frac{١}{س + ٢}$

∴ دَ (س) = ١ + $\frac{-١}{(س + ٢)^{٢}}$ ، دَ (س) = ٠

عند س = -١ ∉ [٠ ، ٣] ، س = -٣ ∉ [٠ ، ٣]

، دَ (س) غير معرفة عند س = -٢ ∉ [٠ ، ٣]

، ∵ د (٠) = $\frac{١}{٢}$ ، د (٣) = ٣$\frac{١}{٥}$

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٣$\frac{١}{٥}$ وتبلغها عند س = ٣

ولها قيمة صغرى مطلقة = $\frac{١}{٢}$ وتبلغها عند س = ٠

[illegible]

، س = $\frac{١}{٢}$ ∈ [-١ ، ١]

، س = -$\frac{١}{٢}$ ∈ [-١ ، ١]

، ∵ د (-١) = ٢ ، د (-$\frac{١}{٢}$) = $\frac{٧}{٨}$

، د (٠) = ١ ، د ($\frac{١}{٢}$) = $\frac{٧}{٨}$

، د (١) = ٢

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٢

تبلغها عند كل من س = -١ ، س = ١

ولها قيمة صغرى مطلقة = $\frac{٧}{٨}$

تبلغها عند كل من س = -$\frac{١}{٢}$ ، س = $\frac{١}{٢}$

2

① (أ) ② (أ) ③ (جـ) ④ (جـ) ⑤ (د)

⑥ (جـ) ⑦ (ب) ⑧ (جـ) ⑨ (جـ)

3

دً (س) = أ س + ب

، دَ (س) = ٠ عند س = $\frac{-ب}{أ}$

، د (س) = ∫ دَ (س) ء س = $\frac{أ س^{٢}}{٢}$ + ب س + ث

، ∵ أ < ٠ ، د دالة تربيعية

∴ د لها قيمة عظمى مطلقة عند س = $\frac{-ب}{أ}$

4

① ص = $\frac{س}{س - ١}$

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{(س - ١) (١) - س (١)}{(س - ١)^{٢}}$ = $\frac{-١}{(س - ١)^{٢}}$

، $\frac{ءص}{ءس}$ غير معرفة عند س = ١ ∉ [٢ ، ٤]

∴ (ص)$_{س = ٢}$ = ٢ ، (ص)$_{س = ٤}$ = $\frac{٤}{٣}$

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٢ وتبلغها عند س = ٢

ولها قيمة صغرى مطلقة = $\frac{٤}{٣}$ وتبلغها عند س = ٤

(٨) [illegible]
[illegible]
∴ الدالة قيمة عظمى مطلقة = [illegible]
وتبلغها عند س = [illegible]
ولها قيمة صغرى مطلقة = [illegible] وتبلغها عند س = [illegible]

(٩) د(س) = [illegible]
∴ د'(س) = [illegible]
، د'(س) = ٠ عند س = [illegible] ∈ [-٢ ، ٢]
، د(-٢) = [illegible] ، د(-١) = [illegible]
، د(١) = ٢ ، د(٢) = [illegible]
∴ الدالة قيمة عظمى مطلقة = ٢ وتبلغها عند س = ١
ولها قيمة صغرى مطلقة = ½
وتبلغها عند س = -١

(١) د(س) = جا س ∴ د'(س) = جتا س
، د'(س) = ٠ ∴ جتا س = ٠
منها س = π/٢ ∉ [٥π/٦ ، ١١π/٦]
أ، س = ٣π/٢ ∈ [٥π/٦ ، ١١π/٦]
∵ د(٥π/٦) = ½ ، د(٣π/٢) = -١
، د(١١π/٦) = -½
∴ الدالة قيمة عظمى مطلقة = ½
وتبلغها عند س = ٥π/٦
ولها قيمة صغرى مطلقة = -١
وتبلغها عند س = ٣π/٢

(٢) د(س) = جا س + جتا س
∴ د'(س) = جتا س - جا س
، د'(س) = ٠ ∴ جتا س - جا س = ٠
∴ ظا س = ١
س = π/٤ ∈ [٠ ، ٢π]
أ، س = ٥π/٤ ∈ [٠ ، ٢π]
∵ د(٠) = ١ ، د(π/٤) = √٢
، د(٥π/٤) = -√٢ ، د(٢π) = ١
∴ الدالة قيمة عظمى مطلقة = √٢
وتبلغها عند س = π/٤
ولها قيمة صغرى مطلقة = -√٢
وتبلغها عند س = ٥π/٤

(٣) د(س) = ٢ جا س + جتا ٢ س
∴ د'(س) = ٢ جتا س - ٢ جا ٢ س
= ٢ جتا س - ٤ جا س جتا س
= ٢ جتا س (١ - ٢ جا س)
، د'(س) = ٠ عند ٢ جتا س = ٠
ومنها س = π/٢ ∈ [٠ ، π/٢]
أ، س = ٣π/٢ ∉ [٠ ، π/٢]
أ، ١ - ٢ جا س = ٠ ومنها جا س = ½
∴ س = π/٦ ∈ [٠ ، π/٢]
أ، س = ٥π/٦ ∉ [٠ ، π/٢]

∵ د(٠) = ١ ، د(π/٦) = ٣/٢
، د(π/٢) = ١
∴ الدالة قيمة عظمى مطلقة = ٣/٢ وتبلغها عند س = π/٦
ولها قيمة صغرى مطلقة = ١
وتبلغها عند س = ٠ ، أ، س = π/٢

(٤) د(س) = س هـ^(-س)
∴ د'(س) = س هـ^(-س) × -١ + هـ^(-س)
= -س هـ^(-س) + هـ^(-س)
= هـ^(-س) (١ - س)
، د'(س) = ٠ ∴ هـ^(-س) (١ - س) = ٠
ومنها س = ١ ∈ [٠ ، ٢]
∵ د(٠) = صفر ، د(١) = ١/هـ ، د(٢) = ٢/هـ²
∴ الدالة قيمة عظمى مطلقة = ١/هـ تبلغها عند س = ١
ولها قيمة صغرى مطلقة = صفر تبلغها عند س = صفر

(٥) د(س) = ١٠ س هـ^(-س)
∴ د'(س) = ١٠ س هـ^(-س) (-١) + ١٠ هـ^(-س)
= ١٠ هـ^(-س) (١ - س)
، د'(س) = ٠ ∴ ١٠ هـ^(-س) (١ - س) = ٠
∴ س = ١ ∈ [٠ ، ٤]
∵ د(٠) = صفر ، د(١) = ١٠ هـ^(-١) = ١٠/هـ
، د(٤) = ٤٠/هـ⁴
∴ الدالة قيمة عظمى مطلقة = ١٠/هـ
وتبلغها عند س = ١
ولها قيمة صغرى مطلقة = ٠ وتبلغها عند س = ٠

(٦) د(س) = س هـ^س
∴ د'(س) = س هـ^س + هـ^س = هـ^س (١ + س)
، د'(س) = ٠ ∴ هـ^س (١ + س) = ٠
منها س = -١ ∈ [-٢ ، ١]

∵ د(-٢) = -٢/هـ² ، د(-١) = -١/هـ
، د(١) = هـ
∴ الدالة قيمة عظمى مطلقة = هـ وتبلغها عند س = ١
ولها قيمة صغرى مطلقة = -١/هـ وتبلغها عند س = -١

(٧) د(س) = س² هـ^(-س)
∴ د'(س) = س² هـ^(-س) (-١) + ٢ س هـ^(-س)
= س هـ^(-س) (٢ - س)
، د'(س) = ٠ منها س = ٠ ∈ [-١ ، ٣]
، س = ٢ ∈ [-١ ، ٣]
∵ د(-١) = هـ ، د(٠) = صفر
، د(٢) = ٤/هـ² ، د(٣) = ٩/هـ³
∴ الدالة قيمة عظمى مطلقة هي هـ وتبلغها عند س = -١
ولها قيمة صغرى مطلقة هي صفر
وتبلغها عند س = صفر

(١) د(س) = √(س - ١) ∴ د'(س) = ١/(٢√(س - ١))
، د'(س) غير معرفة عند س = ١ ∉ [٢ ، ٥]
∵ د(٢) = ١ ، د(٥) = ٢
∴ الدالة قيمة عظمى مطلقة هي ٢ وتبلغها عند س = ٥
ولها قيمة صغرى مطلقة هي ١ وتبلغها عند س = ٢

(٢) د(س) = ∛س ∴ د'(س) = ١/(٣ ∛(س²))
، د'(س) غير معرفة عند س = ٠ ∈ [-٨ ، ٨]
∵ د(-٨) = -٢ ، د(٠) = ٠ ، د(٨) = ٢
∴ الدالة قيمة عظمى مطلقة هي ٢ وتبلغها عند س = ٨
ولها قيمة صغرى مطلقة هي -٢ وتبلغها عند س = -٨

[illegible]
، د'(س) = ٠ عند س = ٠ ∈ [-٤ ، ٣]
، د'(س) غير معرفة عند س = ٤ ∉ [-٤ ، ٣]
، س = -٤ ∈ [-٤ ، ٣]
∵ د(-٤) = ٠ ، د(٠) = ٤ ، د(٣) = √٧
∴ الدالة قيمة عظمى مطلقة هي ٤ وتبلغها عند س = ٠
ولها قيمة صغرى مطلقة هي ٠ وتبلغها عند س = -٤

(٤) د(س) = ∛((س - ١)²)
∴ د'(س) = ٢/٣ (س - ١)^(-١/٣) = ٢/(٣ ∛(س - ١))
، د'(س) غير معرفة عند س = ١ ∈ [٠ ، ٩]
∵ د(٠) = ١ ، د(١) = ٠ ، د(٩) = ٤
∴ الدالة قيمة عظمى مطلقة = ٤ وتبلغها عند س = ٩
ولها قيمة صغرى مطلقة = صفر وتبلغها عند س = ١

(٥) د(س) = س √(١ - س)
∴ د'(س) = س × -١/(٢√(١ - س)) + √(١ - س)
= (-س + ٢ - ٢ س)/(٢√(١ - س)) = (٢ - ٣ س)/(٢√(١ - س))
، د'(س) = ٠ عند س = ٢/٣ ∈ [-١ ، ١]
، د'(س) غير معرفة عند س = ١ ∈ [-١ ، ١]
∵ د(-١) = -√٢ ، د(٢/٣) = ٢√٣/٩
، د(١) = صفر
∴ الدالة قيمة عظمى مطلقة = ٢√٣/٩ وتبلغها عند س = ٢/٣
ولها قيمة صغرى مطلقة = -√٢ وتبلغها عند س = -١

(٦) [illegible]
، د'(س) = ٠ عند س = ١/٤ ∈ [٠ ، ٩]
، د'(س) غير معرفة عند س = ٠ ∈ [٠ ، ٩]
∵ د(٠) = ٠ ، د(١/٤) = -١/٤ ، د(٩) = ٦
∴ الدالة قيمة عظمى مطلقة هي ٦ وتبلغها عند س = ٩
ولها قيمة صغرى مطلقة هي -١/٤ وتبلغها عند س = ١/٤

(٧) د(س) = √(٨ س - س²)
∴ د'(س) = (٨ - ٢ س)/(٢√(٨ س - س²)) = (٤ - س)/√(٨ س - س²)
، د'(س) = ٠ عند س = ٤ ∈ [٠ ، ٨]
، د'(س) غير معرفة عند س = ٠ ، ٨
وكل منهما ينتمي للفترة [٠ ، ٨]
∵ د(٠) = صفر ، د(٤) = ٤ ، د(٨) = صفر
∴ الدالة قيمة عظمى مطلقة هي ٤ وتبلغها عند س = ٤
ولها قيمة صغرى مطلقة هي صفر وتبلغها عند س = ٠ ، عند س = ٨

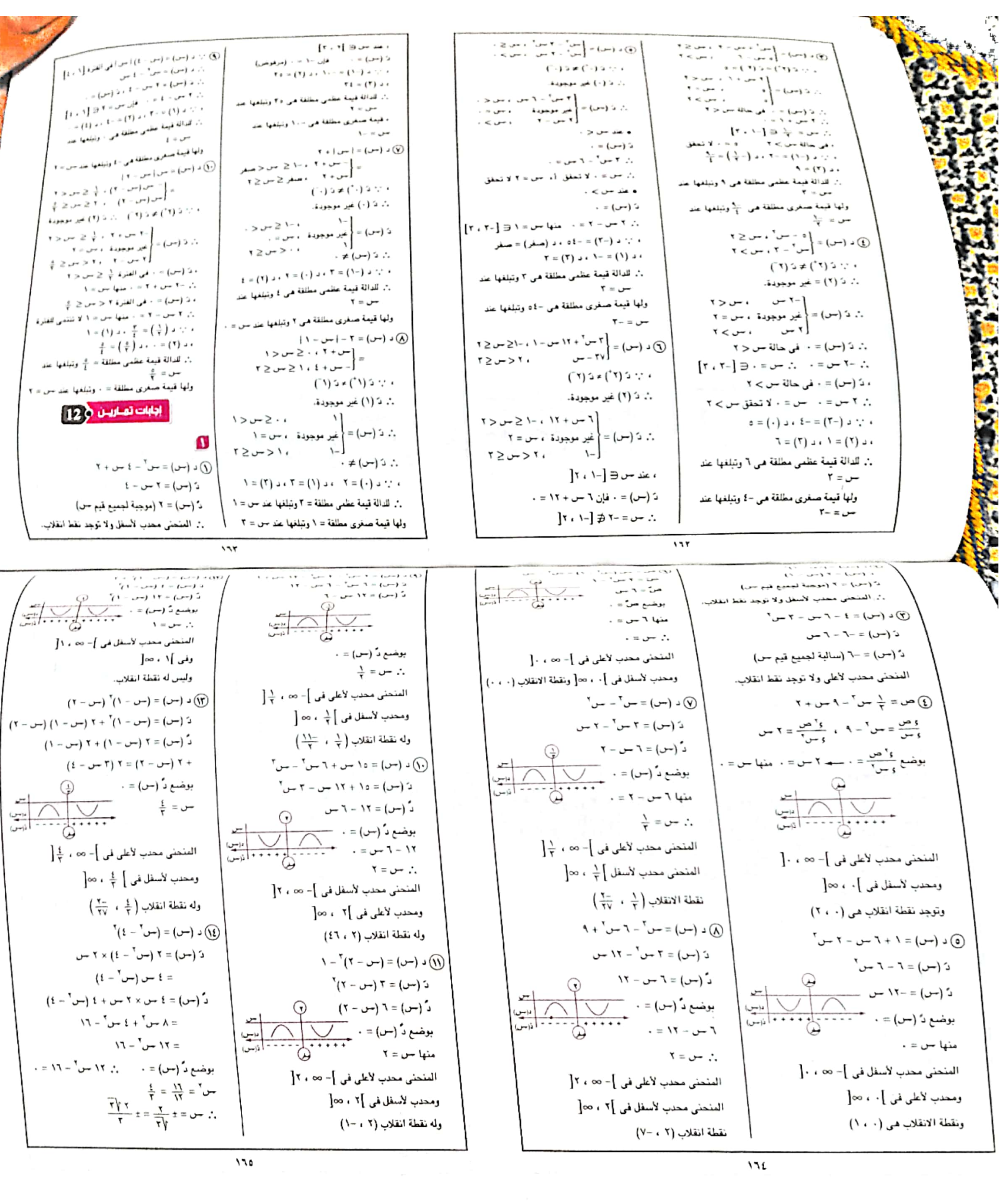
(٨) د(س) = ∛(س² - ٤)
∴ د'(س) = ١/٣ (س² - ٤)^(-٢/٣) (٢ س)
= ٢ س/(٣ ∛((س² - ٤)²))
، د'(س) = ٠ عند س = صفر ∈ [-١ ، ٤]
، د'(س) غير معرفة عند س = ٢ ∈ [-١ ، ٤]
أ، س = -٢ ∉ [-١ ، ٤]
∵ د(-١) = -∛٣ ، د(٠) = -∛٤
، د(٢) = صفر ، د(٤) = ∛١٢
∴ الدالة قيمة عظمى مطلقة هي ∛١٢ وتبلغها عند س = ٤
ولها قيمة صغرى مطلقة هي -∛٤ وتبلغها عند س = ٠

(٩) د(س) = [illegible]
∴ د'(س) = [illegible]
= (٢ س - ٢ - س)/(٢√(س - ١) (س - ١)) = (س - ٢)/(٢ (س - ١)^(٣/٢))
، د'(س) = ٠
عند س = ٢ ∈ [٥/٤ ، ٥]
، د'(س) غير معرفة عند س = ١ ∉ [٥/٤ ، ٥]
، د(٥/٤) = ٥/٢ ، د(٢) = ٢ ، د(٥) = ٥/٢
∴ الدالة قيمة صغرى مطلقة هي ٢ وتبلغها عند س = ٢
ولها قيمة عظمى مطلقة هي ٥/٢ وتبلغها عند س = ٥/٤ ، ٥

(١٠) د(س) = ∛(س - ٢)/س
∴ د'(س) = (س × ١/٣ (س - ٢)^(-٢/٣) - ∛(س - ٢) × ١)/س²
= (س - ٣ (س - ٢))/(٣ س² ∛((س - ٢)²))
= (-٢ س + ٦)/(٣ س² ∛((س - ٢)²))
، د'(س) = ٠ عند س = ٣ ∈ [١ ، ٤]
، د'(س) غير معرفة عند س = ٢ ∈ [١ ، ٤]
أ، س = ٠ ∉ [١ ، ٤]
∵ د(١) = -١ ، د(٢) = ٠ ، د(٤) = ∛٢/٤
∴ الدالة قيمة عظمى مطلقة هي ∛٢/٤ وتبلغها
عند س = ٤
ولها قيمة صغرى مطلقة هي -١ وتبلغها عند س = ١

(١) د(س) = [illegible]
∵ د'(١⁻) = د'(١⁺) = ٢ ∴ د'(١) = ٢
∴ د'(س) = { ٢ ، س < ١ ؛ ٢ ، س = ١ ؛ ٢ س ، س > ١ }
• في حالة س > ١ د'(س) = ٠
∴ ٢ س = ٠ ∴ س = ٠ لا تحقق
∵ د(-٢) = -١ ، د(٢) = ٨
∴ الدالة قيمة عظمى مطلقة هي ٨ وتبلغها عند س = ٢
ولها قيمة صغرى مطلقة هي -١ وتبلغها عند س = -٢

(٢) د(س) = { (س + ٣)² ، س < ٠ ؛ (س - ٣)² ، س ≥ ٠ }
∵ د'(٠⁻) ≠ د'(٠⁺)
∴ د'(٠) غير موجودة.
د'(س) = { ٢ (س + ٣) ، س < ٠ ؛ غير موجودة ، س = ٠ ؛ ٢ (س - ٣) ، س > ٠ }
، د'(س) = ٠ في حالة س < ٠
∴ ٢ (س + ٣) = ٠
∴ س = -٣ ∉ [-٢ ، ٢]
د'(س) = ٠ في حالة س > ٠
∴ ٢ (س - ٣) = ٠
∴ س = ٣ ∉ [-٢ ، ٢]
∵ د(-٢) = ١ ، د(٠) = ٩ ، د(٢) = ١
∴ الدالة قيمة عظمى مطلقة هي ٩ وتبلغها عند س = ٠
ولها قيمة صغرى مطلقة هي ١
وتبلغها عند س = -٢ ، س = ٢



③ د (س) = { س^٢ + ٢ س − ٣ ، س ≤ ٢ ؛ ٥ س − ٦ ، س > ٢ }

∴ دَ (س) = ٠ في حالة س < ٢

∴ ٢ س + ٢ = ٠

∴ س = −١ ∈ [−٢ ، ٣]

، في حالة س > ٢ : ٥ = ٠ لا تتحقق

∴ د (−١) = −٤ ، د (−٢) = −٣ ، د (٣) = ٩

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هي ٩ وتبلغها عند س = ٣

ولها قيمة صغرى مطلقة هي −٤ وتبلغها عند س = −١

④ د (س) = { ٥ − س^٢ ، س ≤ ٢ ؛ س^٢ − ٣ ، س > ٢ }

∵ دَ (٢^+) ≠ دَ (٢^−)

∴ دَ (٢) = غير موجودة.

∴ دَ (س) = { −٢ س ، س < ٢ ؛ غير موجودة ، س = ٢ ؛ ٢ س ، س > ٢ }

∴ دَ (س) = ٠ في حالة س < ٢

∴ −٢ س = ٠ ∴ س = ٠ ∈ [−٢ ، ٢]

، دَ (س) = ٠ في حالة س > ٢

∴ ٢ س = ٠ س = ٠ لا تحقق س > ٢

∵ د (−٢) = −٤ ، د (٠) = ٥

، د (٢) = ١ ، د (٣) = ٦

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هي ٦ وتبلغها عند س = ٣

ولها قيمة صغرى مطلقة هي −٤ وتبلغها عند س = −٢

⑤ د (س) = { س^٣ − ٣ س^٢ ، س ≤ ٠ ؛ س^٣ − ٣ س ، س > ٠ }

∵ دَ (٠^+) ≠ دَ (٠^−)

∴ دَ (٠) غير موجودة

∴ دَ (س) = { ٣ س^٢ − ٦ س ، س < ٠ ؛ غير موجودة ، س = ٠ ؛ ٣ س^٢ − ٣ ، س > ٠ }

• عند س < ٠

دَ (س) = ٠

∴ ٣ س^٢ − ٦ س = ٠

∴ س = ٠ لا تحقق أ، س = ٢ لا تحقق

• عند س > ٠

دَ (س) = ٠

∴ ٣ س^٢ − ٣ = ٠ منها س = ١ ∈ [−٣ ، ٢]

∵ د (−٣) = −٥٤ ، د (صفر) = صفر

، د (١) = −١ ، د (٣) = ٢

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هي ٢ وتبلغها عند س = ٢

ولها قيمة صغرى مطلقة هي −٥٤ وتبلغها عند س = −٣

⑥ د (س) = { ٣ س^٢ + ١٢ س − ١ ، −١ ≤ س ≤ ٢ ؛ ٣٧ − س ، ٢ < س ≤ ٣ }

∵ دَ (٢^+) ≠ دَ (٢^−)

∴ دَ (٢) غير موجودة.

∴ دَ (س) = { ٦ س + ١٢ ، −١ ≤ س < ٢ ؛ غير موجودة ، س = ٢ ؛ −١ ، ٢ < س ≤ ٣ }

، عند س ∈]−١ ، ٢[

دَ (س) = ٠ فإن ٦ س + ١٢ = ٠

∴ س = −٢ ∉]−١ ، ٢[

، عند س ∈]٢ ، ٣]

دَ (س) = ٠ فإن −١ = ٠ (مرفوض)

∵ د (−١) = −١٠ ، د (٢) = ٣٥

، د (٣) = ٣٤

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هي ٣٥ وتبلغها عند س = ٢

، قيمة صغرى مطلقة هي −١٠ وتبلغها عند س = −١

⑦ د (س) = | س | + ٢

= { −س + ٢ ، −١ ≤ س < صفر ؛ س + ٢ ، صفر ≤ س ≤ ٢ }

∵ دَ (٠^+) ≠ دَ (٠^−)

∴ دَ (٠) غير موجودة.

دَ (س) = { −١ ، −١ ≤ س < ٠ ؛ غير موجودة ، س = ٠ ؛ ١ ، ٠ < س ≤ ٢ }

∴ دَ (س) ≠ ٠

∵ د (−١) = ٣ ، د (٠) = ٢ ، د (٢) = ٤

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هي ٤ وتبلغها عند س = ٢

ولها قيمة صغرى مطلقة هي ٢ وتبلغها عند س = ٠

⑧ د (س) = ٣ − | س − ١ |

= { س + ٢ ، ٠ ≤ س < ١ ؛ −س + ٤ ، ١ ≤ س ≤ ٣ }

∵ دَ (١^+) ≠ دَ (١^−)

∴ دَ (١) غير موجودة.

∴ دَ (س) = { ١ ، ٠ ≤ س < ١ ؛ غير موجودة ، س = ١ ؛ −١ ، ١ < س ≤ ٣ }

∴ دَ (س) ≠ ٠

∵ د (٠) = ٢ ، د (١) = ٣ ، د (٣) = ١

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ٣ وتبلغها عند س = ١

ولها قيمة صغرى مطلقة = ١ وتبلغها عند س = ٣

⑨ ∵ د (س) = (س − ٤) | س | في الفترة [١ ، ٤]

∴ د (س) = س^٢ − ٤ س

∴ دَ (س) = ٢ س − ٤ ، دَ (س) = ٠

∴ ٢ س − ٤ = ٠ فإن س = ٢ ∈ [١ ، ٤]

∵ د (١) = −٣ ، د (٢) = −٤ ، د (٤) = ٠

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة هي ٠ وتبلغها عند س = ٤

ولها قيمة صغرى مطلقة هي −٤ وتبلغها عند س = ٢

⑩ د (س) = س | س − ٢ |

= { −س (س − ٢) ، ½ ≤ س < ٢ ؛ س (س − ٢) ، ٢ ≤ س ≤ ⁵⁄₂ }

∵ دَ (٢^+) ≠ دَ (٢^−) ∴ دَ (٢) غير موجودة

∴ دَ (س) = { −٢ س + ٢ ، ½ ≤ س < ٢ ؛ غير موجودة ، س = ٢ ؛ ٢ س − ٢ ، ٢ < س ≤ ⁵⁄₂ }

، دَ (س) = ٠ في الفترة ½ ≤ س < ٢

∴ −٢ س + ٢ = ٠ منها س = ١

، دَ (س) = ٠ في الفترة ٢ < س ≤ ⁵⁄₂

∴ ٢ س − ٢ = ٠ منها س = ١ لا تنتمي للفترة

∵ د (½) = ¾ ، د (١) = ١

، د (٢) = ٠ ، د (⁵⁄₂) = ⁵⁄₄

∴ للدالة قيمة عظمى مطلقة = ⁵⁄₄ وتبلغها عند س = ⁵⁄₂

ولها قيمة صغرى مطلقة = ٠ وتبلغها عند س = ٢

إجابات تمارين 12

1

① د (س) = س^٢ − ٤ س + ٢

دَ (س) = ٢ س − ٤

دً (س) = ٢ (موجبة لجميع قيم س)

∴ المنحنى محدب لأسفل ولا توجد نقط انقلاب.

② ...

دً (س) = ٢ (موجبة لجميع قيم س)

∴ المنحنى محدب لأسفل ولا توجد نقط انقلاب.

③ د (س) = ٤ − ٦ س − ٣ س^٢

دَ (س) = −٦ − ٦ س

دً (س) = −٦ (سالبة لجميع قيم س)

المنحنى محدب لأعلى ولا توجد نقط انقلاب.

④ ص = ⅓ س^٣ − ٩ س + ٢

ءص/ءس = س^٢ − ٩ ، ء^٢ص/ءس^٢ = ٢ س

بوضع ء^٢ص/ءس^٢ = ٠ ⟵ ٢ س = ٠ منها س = ٠

المنحنى محدب لأعلى في]−∞ ، ٠[

ومحدب لأسفل في]٠ ، ∞[

وتوجد نقطة انقلاب هي (٠ ، ٢)

⑤ د (س) = ١ + ٦ س − ٢ س^٣

دَ (س) = ٦ − ٦ س^٢

دً (س) = −١٢ س

بوضع دً (س) = ٠

منها س = ٠

المنحنى محدب لأسفل في]−∞ ، ٠[

ومحدب لأعلى في]٠ ، ∞[

ونقطة الانقلاب هي (٠ ، ١)

⑥ ...

صً = ٦ س

بوضع صً = ٠

منها ٦ س = ٠

∴ س = ٠

المنحنى محدب لأعلى في]−∞ ، ٠[

ومحدب لأسفل في]٠ ، ∞[ونقطة الانقلاب (٠ ، ٠)

⑦ د (س) = س^٣ − س^٢

دَ (س) = ٣ س^٢ − ٢ س

دً (س) = ٦ س − ٢

بوضع دً (س) = ٠

منها ٦ س − ٢ = ٠

∴ س = ⅓

المنحنى محدب لأعلى في]−∞ ، ⅓[

المنحنى محدب لأسفل في]⅓ ، ∞[

نقطة الانقلاب (⅓ ، −²⁄₂₇)

⑧ د (س) = س^٣ − ٦ س^٢ + ٩

دَ (س) = ٣ س^٢ − ١٢ س

دً (س) = ٦ س − ١٢

بوضع دً (س) = ٠

٦ س − ١٢ = ٠

∴ س = ٢

المنحنى محدب لأعلى في]−∞ ، ٢[

المنحنى محدب لأسفل في]٢ ، ∞[

نقطة انقلاب (٢ ، −٧)

⑨ ...

دً (س) = ١٢ س − ٦

بوضع دً (س) = ٠

∴ س = ½

المنحنى محدب لأعلى في]−∞ ، ½[

ومحدب لأسفل في]½ ، ∞[

وله نقطة انقلاب (½ ، −¹¹⁄₂)

⑩ د (س) = ١٥ س + ٦ س^٢ − س^٣

دَ (س) = ١٥ + ١٢ س − ٣ س^٢

دً (س) = ١٢ − ٦ س

بوضع دً (س) = ٠

١٢ − ٦ س = ٠

∴ س = ٢

المنحنى محدب لأسفل في]−∞ ، ٢[

ومحدب لأعلى في]٢ ، ∞[

وله نقطة انقلاب (٢ ، ٤٦)

⑪ د (س) = (س − ٢)^٣ − ١

دَ (س) = ٣ (س − ٢)^٢

دً (س) = ٦ (س − ٢)

بوضع دً (س) = ٠

منها س = ٢

المنحنى محدب لأعلى في]−∞ ، ٢[

ومحدب لأسفل في]٢ ، ∞[

وله نقطة انقلاب (٢ ، −١)

⑫ ...

بوضع دً (س) = ٠

∴ س = ١

المنحنى محدب لأسفل في]−∞ ، ١[

وفي]١ ، ∞[

وليس له نقطة انقلاب.

⑬ د (س) = (س − ١)^٢ (س − ٢)

دَ (س) = (س − ١)^٢ + ٢ (س − ١) (س − ٢)

دً (س) = ٢ (س − ١) + ٢ (س − ١)

+ ٢ (س − ٢) = ٢ (٣ س − ٤)

بوضع دً (س) = ٠

س = ⁴⁄₃

المنحنى محدب لأعلى في]−∞ ، ⁴⁄₃[

ومحدب لأسفل في]⁴⁄₃ ، ∞[

وله نقطة انقلاب (⁴⁄₃ ، −²⁄₂₇)

⑭ د (س) = (س^٢ − ٤)^٢

دَ (س) = ٢ (س^٢ − ٤) × ٢ س

= ٤ س (س^٢ − ٤)

دً (س) = ٤ س × ٢ س + ٤ (س^٢ − ٤)

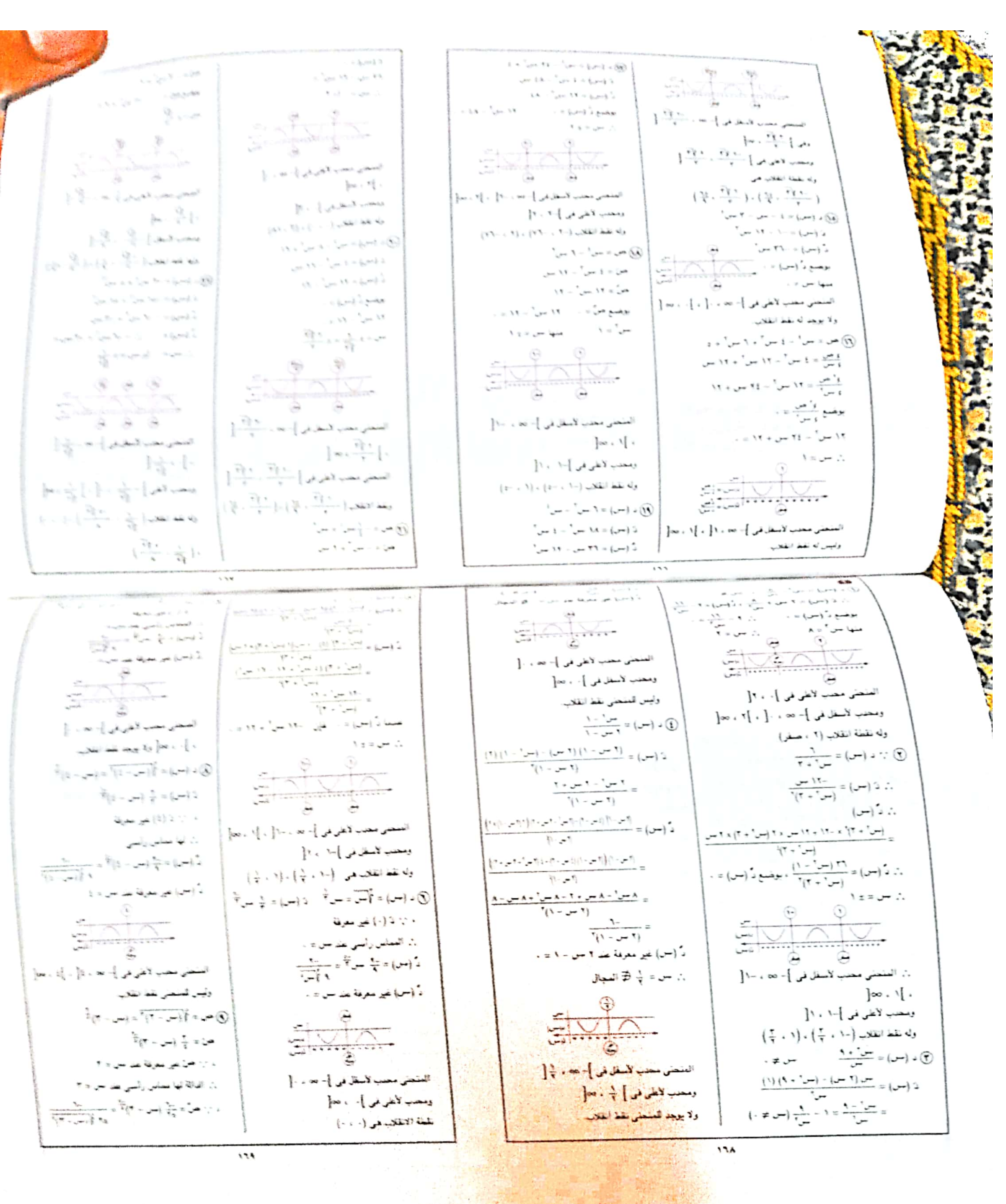
= ٨ س^٢ + ٤ س^٢ − ١٦

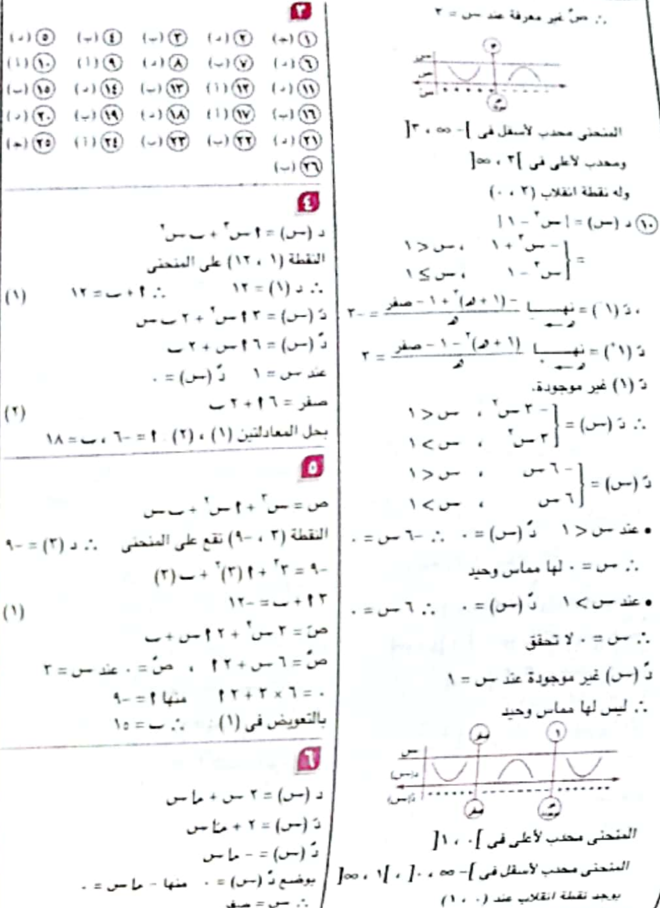
= ١٢ س^٢ − ١٦

بوضع دً (س) = ٠ ∴ ١٢ س^٢ − ١٦ = ٠

س^٢ = ¹⁶⁄₁₂ = ⁴⁄₃

∴ س = ± ٢⁄√٣ = ± ٢√٣⁄٣





∴ صَ غير معرفة عند س = ٢

المنحنى محدب لأسفل في]-∞ ، ٢[

ومحدب لأعلى في]٢ ، ∞[

وله نقطة انقلاب (٢ ، ٠)

(١٠) د (س) = |س^{٢} - ١| - ١

= { -س^{٢} + ١ ، س < ١ ؛ س^{٢} - ١ ، س ≥ ١ }

∵ دَ (١$^{-}$) = نهـــا$_{هـ ← ٠}$ $\frac{-(١ + هـ)^{٢} + ١ - صفر}{هـ}$ = -٢

دَ (١$^{+}$) = نهـــا$_{هـ ← ٠}$ $\frac{(١ + هـ)^{٢} - ١ - صفر}{هـ}$ = ٢

دَ (١) غير موجودة.

∴ دَ (س) = { -٢ س ، س < ١ ؛ ٢ س ، س > ١ }

دً (س) = { -٦ س ، س < ١ ؛ ٦ س ، س > ١ }

• عند س < ١ دً (س) = ٠ ∴ -٦ س = ٠

∴ س = ٠ لها مماس وحيد

• عند س > ١ دً (س) = ٠ ∴ ٦ س = ٠

∴ س = ٠ لا تحقق

دً (س) غير موجودة عند س = ١

∴ ليس لها مماس وحيد

المنحنى محدب لأعلى في]٠ ، ١[

المنحنى محدب لأسفل في]-∞ ، ٠[،]١ ، ∞[

يوجد نقطة انقلاب عند (٠ ، ١)

٣

(١) (جـ)	(٢) (د)	(٣) (ب)	(٤) (ب)	(٥) (د)
(٦) (د)	(٧) (ب)	(٨) (د)	(٩) (أ)	(١٠) (أ)
(١١) (د)	(١٢) (أ)	(١٣) (ب)	(١٤) (د)	(١٥) (ب)
(١٦) (ب)	(١٧) (أ)	(١٨) (د)	(١٩) (ب)	(٢٠) (د)
(٢١) (د)	(٢٢) (ب)	(٢٣) (ب)	(٢٤) (أ)	(٢٥) (جـ)
(٢٦) (ب)				

٤

د (س) = أ س^{٣} + ب س^{٢}

النقطة (١ ، ١٢) على المنحنى

∴ د (١) = ١٢ ∴ أ + ب = ١٢ (١)

دَ (س) = ٣ أ س^{٢} + ٢ ب س

دً (س) = ٦ أ س + ٢ ب

عند س = ١ دً (س) = ٠

صفر = ٦ أ + ٢ ب (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) أ = -٦ ، ب = ١٨

٥

ص = س^{٣} + أ س^{٢} + ب س

النقطة (٣ ، -٩) تقع على المنحنى ∴ د (٣) = -٩

-٩ = ٣^{٣} + أ (٣)^{٢} + ب (٣)

٣ أ + ب = -١٢ (١)

صَ = ٣ س^{٢} + ٢ أ س + ب

صً = ٦ س + ٢ أ ، صً = ٠ عند س = ٣

٠ = ٦ × ٣ + ٢ أ منها أ = -٩

بالتعويض في (١) ∴ ب = ١٥

٦

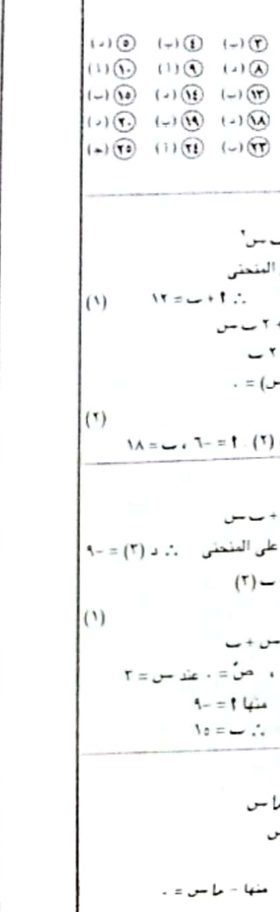
د (س) = ٢ س + جا س

دَ (س) = ٢ + جتا س

دً (س) = - جا س

بوضع دً (س) = ٠ منها - جا س = ٠

∴ س = صفر



المنحنى محدب لأسفل في]-$\frac{\pi}{٢}$ ، ٠[

ومحدب لأعلى في]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

له نقطة انقلاب هي (٠ ، ٠)

٧

د (س) = $\frac{س}{١ - س^{٢}}$

دَ (س) = $\frac{(١ - س^{٢})(١) - س(-٢ س)}{(١ - س^{٢})^{٢}}$

= $\frac{١ + س^{٢}}{(١ - س^{٢})^{٢}}$

دً (س) = $\frac{(١ - س^{٢})^{٢}(٢ س) - (١ + س^{٢}) × ٢(١ - س^{٢}) × -٢ س}{(١ - س^{٢})^{٤}}$

= $\frac{(١ - س^{٢})[(١ - س^{٢})(٢ س) + ٤ س (١ + س^{٢})]}{(١ - س^{٢})^{٤}}$

= $\frac{٦ س + ٢ س^{٣}}{(١ - س^{٢})^{٣}}$

دً (س) = ٠ فإن س = صفر

نقطة الانقلاب هي (٠ ، ٠)

الميل عند (٠ ، ٠) = دَ (٠) = ١

∴ قياس الزاوية التي يصنعها المماس = ظا$^{-١}$ (١) = $\frac{\pi}{٤}$

٨

د (س) = س (س - ٣)^{٢}

∴ د (س) = س^{٣} - ٦ س^{٢} + ٩ س

∴ دَ (س) = ٣ س^{٢} - ١٢ س + ٩

• دً (س) = ٦ س - ١٢

• دً (س) = ٠ عندما س = ٢

∴ عند س = ٢ يوجد نقطة انقلاب

• بوضع دَ (س) = ٠

∴ ٣ س^{٢} - ١٢ س + ٩ = ٠

∴ س = ٣ أ، س = ١

• ∵ دً (٣) = ٦ > ٠

∴ عند س = ٣ نقطة قيمة صغرى للدالة

• ∵ دً (١) = -٦ < ٠

∴ عند س = ١ نقطة قيمة عظمى للدالة

∴ س$_{١}$ = ١ ، س$_{٢}$ = ٣

∴ $\frac{س_{١} + س_{٢}}{٢}$ = $\frac{١ + ٣}{٢}$ = ٢

= الاحداثي السيني لنقطة الانقلاب.

٩

دَ (س) = أ س + ب دً (س) = أ > ٠

بوضع دَ (س) = ٠ فإن س = $\frac{-ب}{أ}$

عند س = $\frac{-ب}{أ}$ نقطة حرجة دً ($\frac{-ب}{أ}$) = أ > ٠

∴ منحنى د له قيمة عظمى محلية عند س = $\frac{-ب}{أ}$

دً (س) = قيمة ثابتة سالبة

∴ لا تساوي صفر لجميع قيم س

∴ لا توجد نقطة انقلاب للمنحنى

١٠

ص = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + ء

صَ = ٣ أ س^{٢} + ٢ ب س + جـ

صً = ٦ أ س + ٢ ب

∵ المنحنى له نقطة انقلاب عند (٠ ، ٤)

∴ صً = ٠ عند س = ٠ ∴ ٢ ب = ٠ ∴ ب = ٠

• ∵ المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ٤)

∴ ص = ٤ عندما س = ٠

∴ ٤ = ٠ + ٠ + ٠ + ء ∴ ء = ٤

∴ ص = أ س^{٣} + جـ س + ٤

• صَ = ٣ أ س^{٢} + جـ

∵ المنحنى يمر بالنقطة (٢ ، ٠)

∴ ص = ٠ عند س = ٢

∴ ٠ = ٨ أ + ٢ جـ + ء

∴ ٤ أ + جـ = -٢ (١)

∵ المنحنى يمس محور السينات في (٢ ، ٠)

∴ صَ = ٠ عند س = ٢ ∴ ١٢ أ + جـ = ٠ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) : ∴ أ = $\frac{١}{٤}$ ، جـ = -٣

١١

ص = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + ء

صَ = ٣ أ س^{٢} + ٢ ب س + جـ

صً = ٦ أ س + ٢ ب

∵ المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ٢)

∴ ص = ٢ عندما س = ٠

∴ ٢ = ٠ + ٠ + ٠ + ء ∴ ء = ٢

• ∵ له مماس أفقي عند س = ١

∴ صَ = ٠ عندما س = ١

∴ ٠ = ٣ أ + ٢ ب + جـ

∴ ٣ أ + ٢ ب + جـ = ٠ (١)

• ∵ النقطة (٢ ، ٤) هي نقطة انقلاب

∴ صً = ٠ عندما س = ٢

∴ ٠ = ١٢ أ + ٢ ب

∴ ٦ أ + ب = ٠ (٢)

• ∵ المنحنى يمر بالنقطة (٢ ، ٤)

∴ ص = ٤ عندما س = ٢

∴ ٤ = ٨ أ + ٤ ب + ٢ جـ + ٢

∴ ٤ أ + ٢ ب + جـ = ١ (٣)

• بحل المعادلات (١) ، (٢) ، (٣) :

∴ أ = ١ ، ب = -٦ ، جـ = ٩ ، ء = ٢

١٢

د (س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + ء

دَ (س) = ٣ أ س^{٢} + ٢ ب س + جـ

دً (س) = ٦ أ س + ٢ ب

∵ المنحنى له نقطة انقلاب عند (١ ، ٢)

∴ دً (١) = صفر ∴ ٦ أ + ٢ ب = ٠

∴ ب = -٣ أ (١)

• ∵ المنحنى له قيمة عظمى محلية عند (٢ ، ٤)

∴ دَ (٢) = ٤ ∴ ١٢ أ + ٤ ب + جـ = ٠

ومن (١) : ∴ ١٢ أ - ١٢ أ + جـ = ٠

∴ جـ = ٠ (٢)

• ∵ المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٢)

∴ د (١) = ٢ ∴ أ + ب + جـ + ء = ٢

ومن (١) ، (٢) : ∴ أ - ٣ أ + ء = ٢

∴ -٢ أ + ء = ٢ (٣)

• ∵ المنحنى يمر بالنقطة (٢ ، ٤)

∴ د (٢) = ٤ ∴ ٨ أ + ٤ ب + ٢ جـ + ء = ٤

ومن (١) ، (٢) : ∴ ٨ أ - ١٢ أ + ٠ + ء = ٤

∴ -٤ أ + ء = ٤ (٤)

وبحل المعادلتين (٣) ، (٤) : ∴ أ = -١ ، ء = ٠

∴ ب = ٣

∴ معادلة المنحنى هي : د (س) = - س^{٣} + ٣ س^{٢}

١٣

د هي دالة من الدرجة الثالثة

∴ د (س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + ء

حيث أ ، ب ، جـ ، ء مقادير ثابتة

دَ (س) = ٣ أ س^{٢} + ٢ ب س + جـ

دً (س) = ٦ أ س + ٢ ب

∵ المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٠) ∴ د (١) = ٠

∴ ٠ = أ + ب + جـ + ء (١)

∵ المنحنى يمر بالنقطة (٢ ، ١) ∴ د (٢) = ١

∴ ١ = ٨ أ + ٤ ب + ٢ جـ + ء (٢)

∵ ميل المماس عند النقطة (٢ ، ١) = $\frac{-٣}{٢}$

∴ صَ = $\frac{-٣}{٢}$ عند س = ٢

$\frac{-٣}{٢}$ = ١٢ أ + ٤ ب + جـ (٣)

∵ (٢ ، ١) نقطة انقلاب صً = ٠ عند س = ٢

٠ = ١٢ أ + ٢ ب (٤)

من (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) نتنج أن :

أ = $\frac{٥}{٢}$ ، ب = -١٥ ، جـ = $\frac{٥٧}{٢}$ ، ء = -١٦

معادلة المنحنى :

د (س) = $\frac{٥}{٢}$ س^{٣} - ١٥ س^{٢} + $\frac{٥٧}{٢}$ س - ١٦

١٤

د (س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + ٩ س + ١

دَ (س) = ٣ أ س^{٢} + ٢ ب س + ٩

دً (س) = ٦ أ س + ٢ ب

دَ (س) = ٠ عند س = ١ ، س = ٣

∴ دَ (١) = ٣ أ + ٢ ب + ٩ = ٠

٣ أ + ٢ ب = -٩ (١)

دَ (٣) = ٢٧ أ + ٦ ب + ٩ = ٠

٩ أ + ٢ ب = -٣ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) : أ = ١ ب = -٦

∴ معادلة المنحنى هي

د (س) = س^{٣} - ٦ س^{٢} + ٩ س + ١

دَ (س) = ٦ (١) س + ٢ (-٦) = ٦ س - ١٢

دً (س) = ٠ عند (س - ٢) = ٠ ∴ س = ٢

المنحنى محدب لأعلى في]-∞ ، ٢[

ومحدب لأسفل في]٢ ، ∞[

وله نقطة انقلاب هي (٢ ، ٣)

١٥

د (س) = { ٢ س^{٢} + أ س + ب ، س ≥ ١ ؛ ٣ س - س^{٢} ، س < ١ }

∵ الدالة قابلة للاشتقاق ∴ الدالة متصلة

∴ د (١$^{-}$) = د (١$^{+}$) = د (١)

٢ + أ + ب = ٣ - ١ ∴ أ = - ب

دَ (س) = { ٤ س + أ ، س ≥ ١ ؛ ٣ - ٢ س ، س < ١ }

∵ دَ (١$^{-}$) = دَ (١$^{+}$)

٤ + أ = ٣ - ٢ ∴ أ = -٣ ∴ ب = ٣

دً (١$^{+}$) = نهـــا$_{هـ ← ٠}$ $\frac{دَ (هـ + ١) - دَ (١)}{هـ}$

= نهـــا$_{هـ ← ٠}$ $\frac{٤ (هـ + ١) + أ - (٤ + أ)}{هـ}$

= نهـــا$_{هـ ← ٠}$ $\frac{٤ هـ + ٤ - ٣ - ٤ + ٣}{هـ}$ = ٤

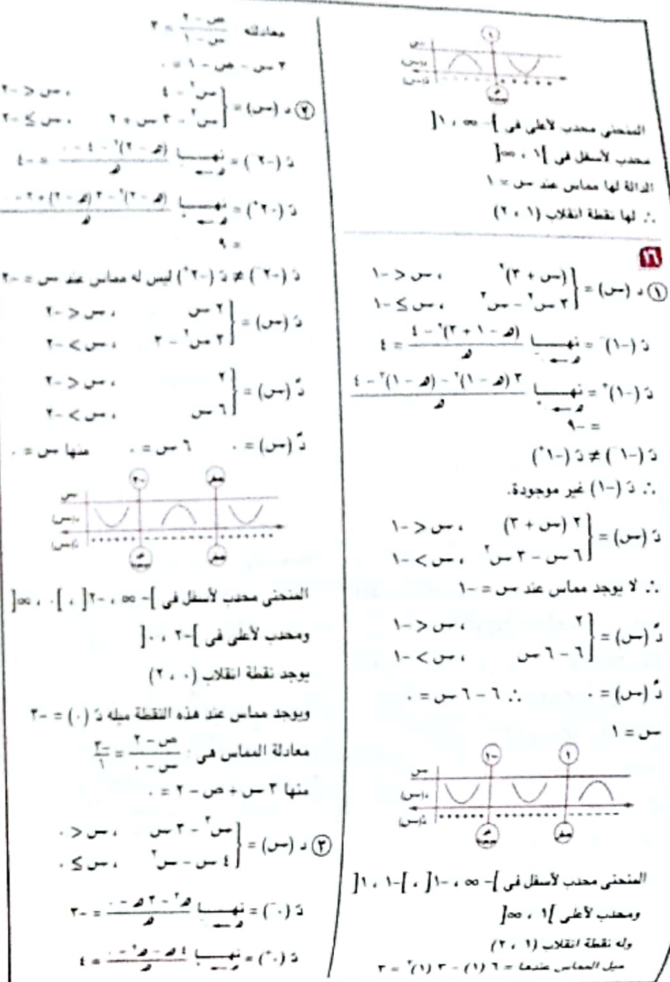
دً (١$^{-}$) = نهـــا$_{هـ ← ٠}$ $\frac{دَ (هـ + ١) - دَ (١)}{هـ}$

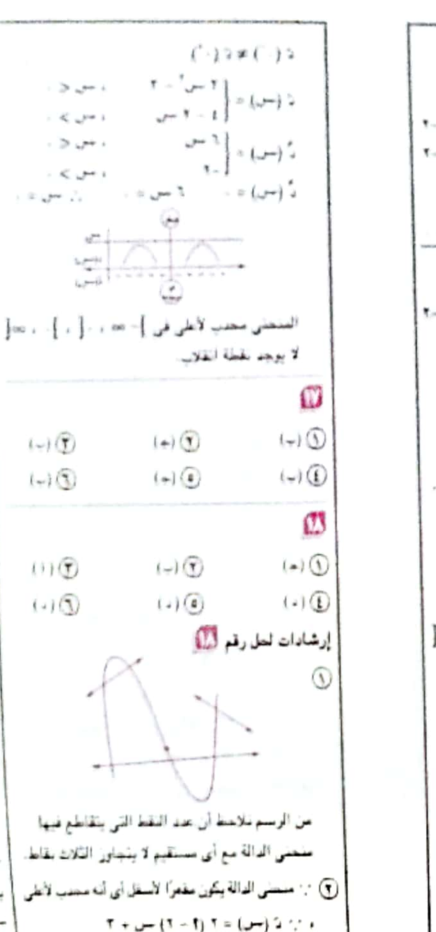
= نهـــا$_{هـ ← ٠}$ $\frac{٣ - ٢ (هـ + ١) - (٤ + أ)}{هـ}$

= نهـــا$_{هـ ← ٠}$ $\frac{٣ - ٢ هـ - ٢ - ٤ + ٣}{هـ}$ = -٢

دً (١) غير موجودة.

دً (س) = { ٤ ، س > ١ ؛ غير موجودة ، س = ١ ؛ -٢ ، س < ١ }





إجابات تمارين 13

أولاً: مسائل على رسم المنحنيات

1

① د (س) = ٢ − س^٢ ∴ دَ (س) = − ٢ س

، دً (س) = − ٢

• بوضع دَ (س) = ٠ ∴ س = ٠

، ∵ دً (س) = − ٢ ≠ ٠

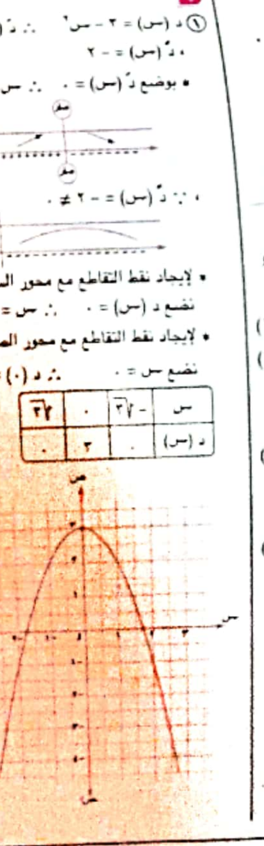
• لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات

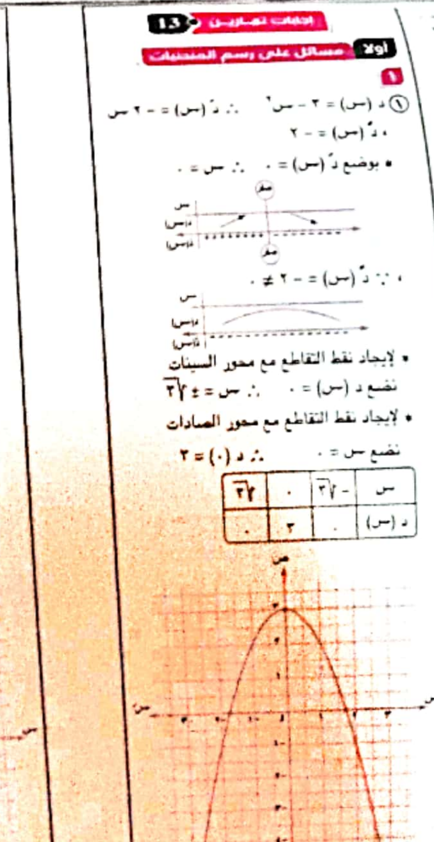
نضع د (س) = ٠ ∴ س = ± $\sqrt{2}$

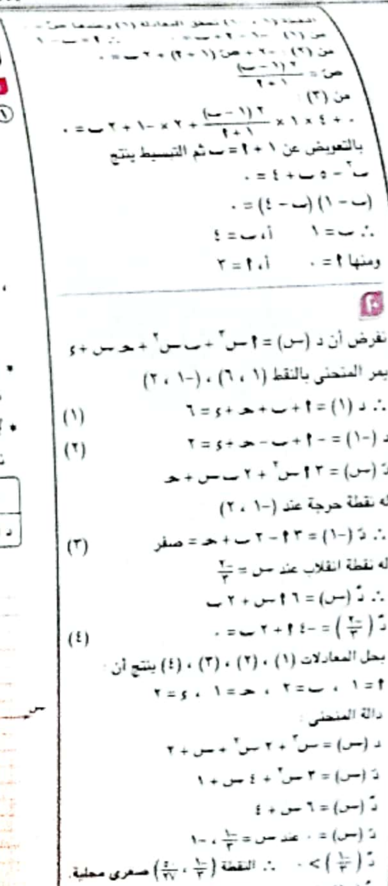
• لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

نضع س = ٠ ∴ د (٠) = ٢

س	− $\sqrt{2}$	٠	$\sqrt{2}$
د (س)	٠	٢	٠







من (٣)

٠ + ٤ × ١ × $\frac{٢ (١ − ب)}{أ + ١}$ + ٢ × − ١ + ٢ ب = ٠

بالتعويض عن ١ + أ = ب ثم التبسيط ينتج

ب^٢ − ٥ ب + ٤ = ٠

(ب − ١) (ب − ٤) = ٠

∴ ب = ١ أ، ب = ٤

ومنها أ = ٠ أ، أ = ٢

٢٠

نفرض أن د (س) = أ س^٣ + ب س^٢ + حـ س + ء

يمر المنحنى بالنقط (١ ، ٦) ، (−١ ، ٢)

∴ د (١) = أ + ب + حـ + ء = ٦ (١)

د (−١) = − أ + ب − حـ + ء = ٢ (٢)

دَ (س) = ٣ أ س^٢ + ٢ ب س + حـ

له نقطة حرجة عند (−١ ، ٢)

∴ دَ (−١) = ٣ أ − ٢ ب + حـ = صفر (٣)

له نقطة انقلاب عند س = $\frac{-٢}{٣}$

∴ دً (س) = ٦ أ س + ٢ ب

دً ($\frac{-٢}{٣}$) = − ٤ أ + ٢ ب = ٠ (٤)

بحل المعادلات (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) ينتج أن

أ = ١ ، ب = ٢ ، حـ = ١ ، ء = ٢

دالة المنحنى

د (س) = س^٣ + ٢ س^٢ + س + ٢

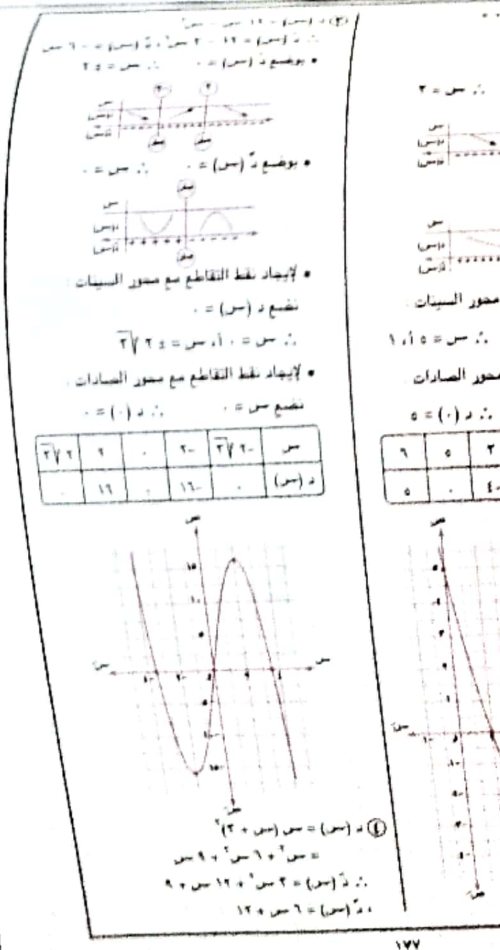
دَ (س) = ٣ س^٢ + ٤ س + ١

دً (س) = ٦ س + ٤

دَ (س) = ٠ عند س = $\frac{-١}{٣}$ ، −١

دً ($\frac{-١}{٣}$) > ٠ ∴ النقطة ($\frac{-١}{٣}$ ، $\frac{٥٠}{٢٧}$) صغرى محلية.

دً (−١) < ٠ ∴ النقطة (−١ ، ٢) عظمى محلية.



س	٠	١	٢	٣	٥	٦
د (س)	٥	٠	[illegible]	−٤	٠	٥

س	−٢$\sqrt{3}$	−٢	٠	٢	٢$\sqrt{3}$
د (س)	٠	−١٦	٠	١٦	٠

، دً (س) = ٦ س − ٦

• بوضع دَ (س) = ٠ ∴ س = −١ ، ٢

• بوضع دً (س) = ٠ ∴ س = ١

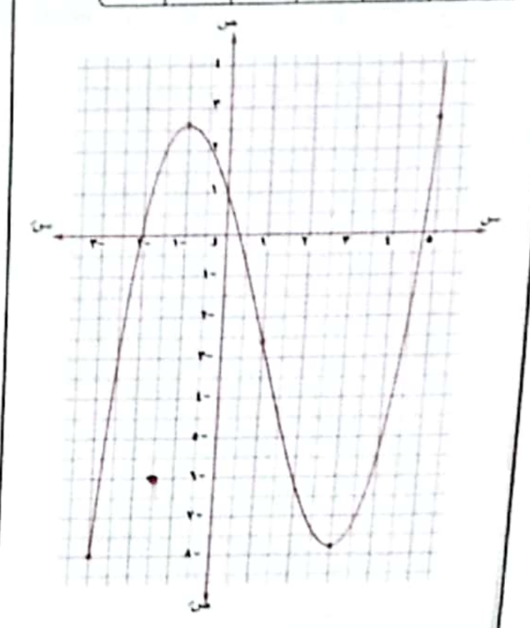
• لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

نضع س = ٠ ∴ د (٠) = ١

• نعين نقط مساعدة : د (−٣) = −٨

، د (٥) = $\frac{٨}{٣}$

س	−٣	−١	١	٣	٥
د (س)	−٨	$\frac{٨}{٣}$	$\frac{-٨}{٣}$	−٨	$\frac{٨}{٣}$

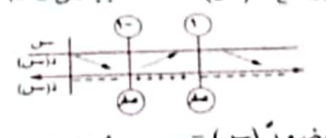


+ (−١) (س + ١)²

= (−٢ س + ٢) (س + ١)

، دً (س) = (−٢ س + ٢) + −٢ (س + ١) = −٦ س

• بوضع دَ (س) = ٠ ∴ س = −١ ، ١



• بوضع دً (س) = ٠ ∴ س = ٠

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات :

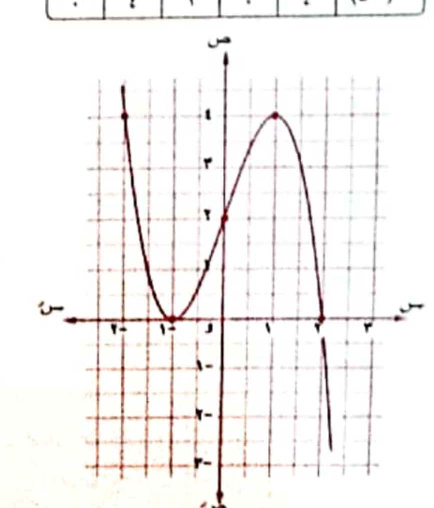
∴ د (س) = ٠ ∴ س = ٢ أ، −١

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات :

نضع س = ٠ ∴ د (٠) = ٢

• نعين نقطة مساعدة : د (−٢) = ٤

س	−٢	−١	٠	١	٢
د (س)	٤	٠	٢	٤	٠

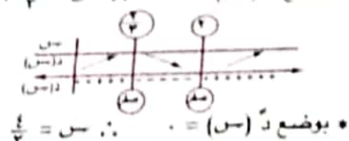


= س³ − ٤ س² + ٤ س + ٢

∴ دَ (س) = ٣ س² − ٨ س + ٤

، دً (س) = ٦ س − ٨

• بوضع دَ (س) = ٠ ∴ س = $\frac{٢}{٣}$ ، ٢



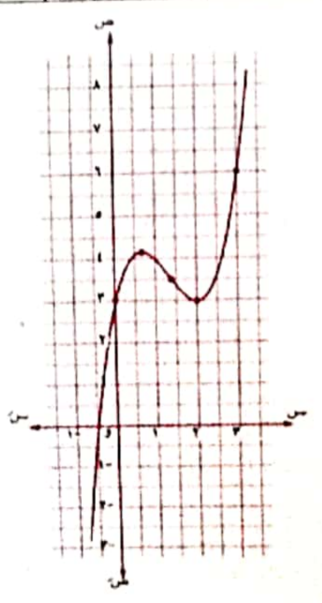
• بوضع دً (س) = ٠ ∴ س = $\frac{٤}{٣}$

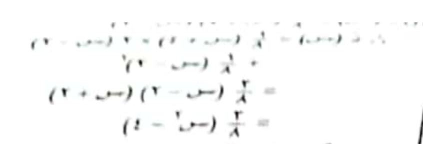
• لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

س = ٠ ∴ د (٠) = ٢

• نعين نقطة مساعدة : د (٣) = ٦

س	٠	$\frac{٢}{٣}$	$\frac{٤}{٣}$	٢	٣
د (س)	٢	$\frac{١١٣}{٢٧}$	$\frac{٩٧}{٢٧}$	٢	٦





∴ دَ (س) = $\frac{١}{٨}$ (س + ٤) × ٢ (س − ٢)

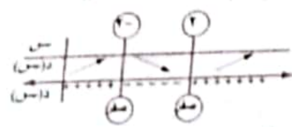
+ $\frac{١}{٨}$ (س − ٢)²

= $\frac{٣}{٨}$ (س − ٢) (س + ٢)

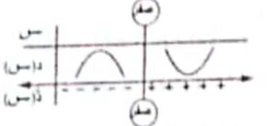
= $\frac{٣}{٨}$ (س² − ٤)

∴ دً (س) = $\frac{٣}{٤}$ س

• بوضع دَ (س) = ٠ ∴ س = ± ٢



• بوضع دً (س) = ٠ ∴ س = ٠



• لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات

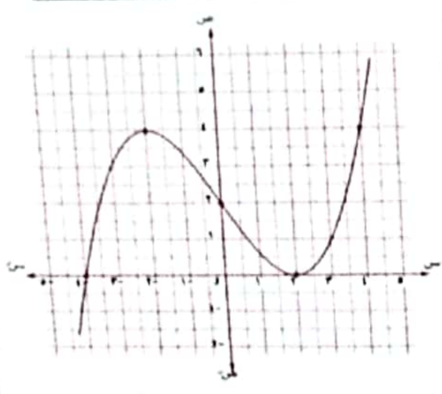
نضع د (س) = ٠ ∴ س = −٤ أ، ٢

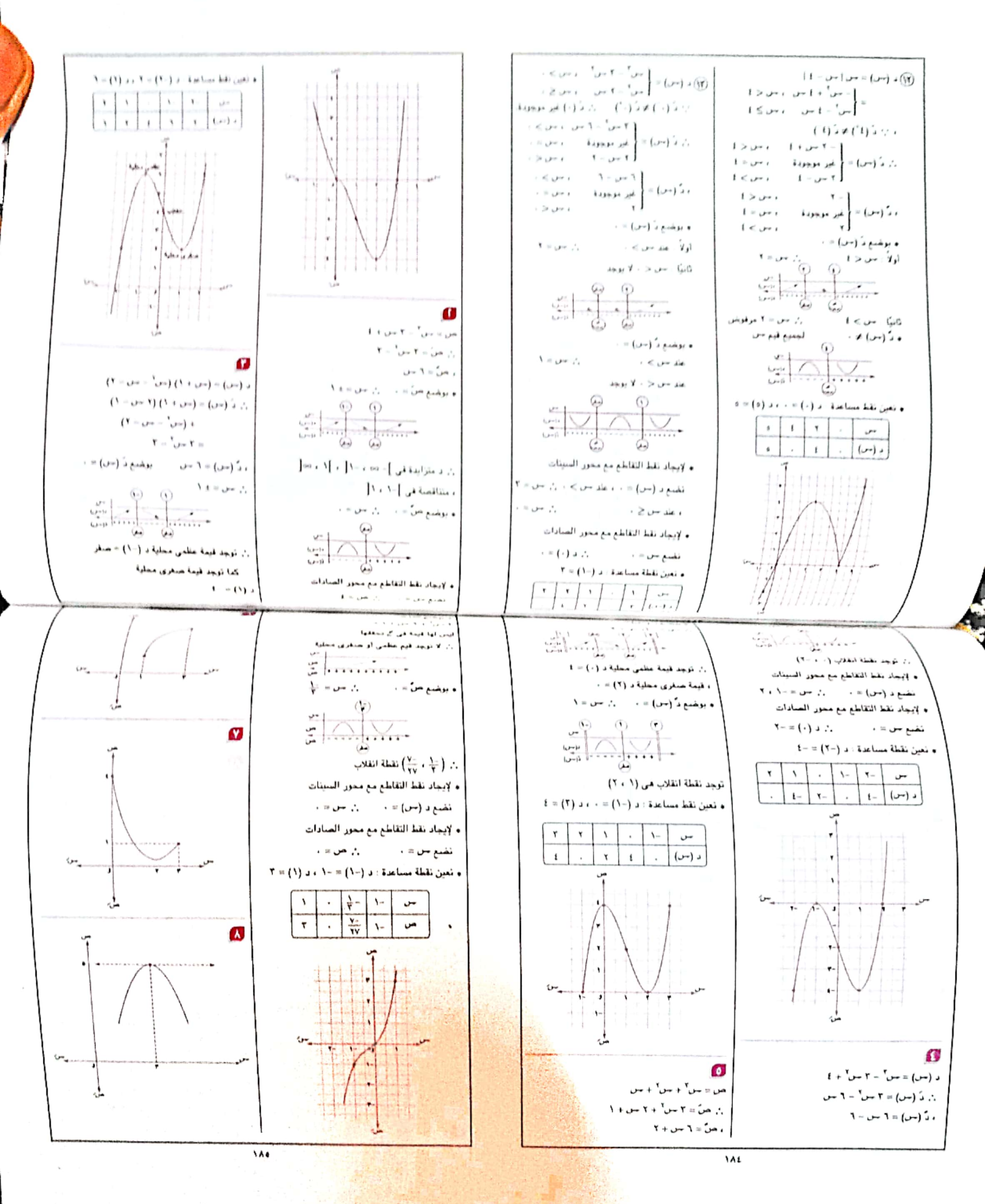
• لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

نضع س = ٠ ∴ د (٠) = ٢

• نعين نقطة مساعدة : د (٤) = ٤

س	−٤	−٢	٠	٢	٤
د (س)	٠	٤	٢	٠	٤





(١٢) د (س) = س | س − ٤ |

$$= \begin{cases} -س^{٢} + ٤ س &، س < ٤ \\ س^{٢} - ٤ س &، س \geq ٤ \end{cases}$$

∵ دَ (٤⁻) ≠ دَ (٤⁺)

$$∴ دَ (س) = \begin{cases} -٢ س + ٤ &، س < ٤ \\ \text{غير موجودة} &، س = ٤ \\ ٢ س - ٤ &، س > ٤ \end{cases}$$

$$، دً (س) = \begin{cases} -٢ &، س < ٤ \\ \text{غير موجودة} &، س = ٤ \\ ٢ &، س > ٤ \end{cases}$$

• بوضع دَ (س) = ٠

أولاً : س < ٤ ∴ س = ٢

ثانياً : س > ٤ ∴ س = ٢ مرفوض

• دً (س) ≠ ٠ لجميع قيم س

• تعين نقط مساعدة : د (٠) = ٠ ، د (٥) = ٥

س	٠	٢	٤	٥
د (س)	٠	٤	٠	٥

(١٣) د (س) $= \begin{cases} س^{٣} - ٣ س^{٢} &، س > ٠ \\ س^{٣} - ٣ س &، س \leq ٠ \end{cases}$

∵ دَ (٠⁻) ≠ دَ (٠⁺) ∴ دَ (٠) غير موجودة

$$∴ دَ (س) = \begin{cases} ٣ س^{٢} - ٦ س &، س > ٠ \\ \text{غير موجودة} &، س = ٠ \\ ٣ س^{٢} - ٣ &، س < ٠ \end{cases}$$

$$، دً (س) = \begin{cases} ٦ س - ٦ &، س > ٠ \\ \text{غير موجودة} &، س = ٠ \\ ٦ س &، س < ٠ \end{cases}$$

• بوضع دَ (س) = ٠

أولاً : عند س > ٠ ∴ س = ٢

ثانياً : س < ٠ لا يوجد

• بوضع دً (س) = ٠

عند س > ٠ ∴ س = ١

عند س < ٠ لا يوجد

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات

نضع د (س) = ٠ ، عند س > ٠ ∴ س = ٣

، عند س ≤ ٠ ∴ س = ٠

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

نضع س = ٠ ∴ د (٠) = ٠

• تعين نقطة مساعدة : د (−١) = ٢

س	١	٠	١	٢	٢
د (س)	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

(١) ص = س^{٣} − ٣ س + ٤

∴ صَ = ٣ س^{٢} − ٣

، صً = ٦ س

• بوضع صَ = ٠ ∴ س = ± ١

∴ د متزايدة في]−∞ ، −١[،]١ ، ∞[

، متناقصة في]−١ ، ١[

• بوضع صً = ٠ ∴ س = ٠

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

نضع س = ٠ ∴ ص = ٤

• تعين نقط مساعدة : د (−٢) = ٢ ، د (١) = ٦

س	−٢	−١	٠	١	٢
د (س)	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

(٢) د (س) = (س + ١) (س^{٢} − س − ٢)

∴ دَ (س) = (س + ١) (٢ س − ١)

+ (س^{٢} − س − ٢)

= ٣ س^{٢} − ٣

، دً (س) = ٦ س بوضع دً (س) = ٠

∴ س = ± ١

∴ توجد قيمة عظمى محلية د (−١) = صفر

كما توجد قيمة صغرى محلية

د (١) = −٤

∴ توجد نقطة انقلاب (٠ ، −٢)

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات

نضع د (س) = ٠ ∴ س = −١ ، ٢

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

نضع س = ٠ ∴ د (٠) = −٢

• تعين نقطة مساعدة : د (−٢) = −٤

س	−٢	−١	٠	١	٢
د (س)	−٤	٠	−٢	−٤	٠

(٤) د (س) = س^{٣} − ٣ س^{٢} + ٤

∴ دَ (س) = ٣ س^{٢} − ٦ س

، دً (س) = ٦ س − ٦

∴ توجد قيمة عظمى محلية د (٠) = ٤

، قيمة صغرى محلية د (٢) = ٠

• بوضع دً (س) = ٠ ∴ س = ١

توجد نقطة انقلاب هى (١ ، ٢)

• تعين نقط مساعدة : د (−١) = ٠ ، د (٣) = ٤

س	−١	٠	١	٢	٣
د (س)	٠	٤	٢	٠	٤

(٥) ص = س^{٣} + س^{٢} + س

∴ صَ = ٣ س^{٢} + ٢ س + ١

، صً = ٦ س + ٢

ليس لها قيمة في ح تحققها

∴ لا توجد قيم عظمى أو صغرى محلية

• بوضع صً = ٠ ∴ س = $-\frac{١}{٣}$

∴ $\left(-\frac{١}{٣} ، -\frac{٧}{٢٧}\right)$ نقطة انقلاب

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات

نضع د (س) = ٠ ∴ س = ٠

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

نضع س = ٠ ∴ ص = ٠

• تعين نقطة مساعدة : د (−١) = −١ ، د (١) = ٣

س	−١	$-\frac{١}{٣}$	٠	١
ص	−١	$-\frac{٧}{٢٧}$	٠	٣

(٧)

(٨)

٩

١٠

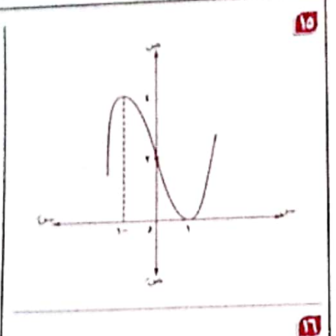
١١

١٢

١٣

١٤

١٥



١٦

ص = أ سٓ٣ + ب س٢

∴ صَ = ٣ أ س٢ + ٢ ب س

∴ صً = ٦ أ س + ٢ ب

، ∵ (١ ، ٢) ∈ للمنحنى ∴ ٢ = أ + ب (١)

، ∵ (١ ، ٢) نقطة انقلاب ∴ ٠ = ٦ أ + ٢ ب (٢)

من (١) ، (٢) : أ = $\frac{-٣}{٢}$ ، ب = $\frac{٩}{٢}$

∴ ص = $\frac{-٣}{٢}$ س٣ + $\frac{٩}{٢}$ س٢

، صَ = $-\frac{٩}{٢}$ س٢ + ٩ س

، صً = − ٩ س + ٩

بوضع صَ = ٠ ∴ س = ٠ أ، س = ٢

بوضع دً (س) = ٠ ∴ س = ١

∴ (١ ، ٢) نقطة انقلاب

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات

نضع ص = ٠ ومنها س = ٢ أ، صفر

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات نضع س = ٠

∴ ص = ٠

نعين نقطة مساعدة : د (−١) = ٦

س	−١	٠	١	٢	٣
ص	٦	٠	٢	٦	٠

١٧

ص = أ س٣ + ب س٢ + جـ س + ء

∴ صَ = ٣ أ س٢ + ٢ ب س + جـ

∴ صً = ٦ أ س + ٢ ب

، المنحنى يمر بالنقط (٠ ، ٦) ، (١ ، ٥)

∴ ٦ = ٠ + ٠ + ٠ + ء ∴ ء = ٦

، ٥ = أ + ب + جـ + ٦ ∴ أ + ب + جـ = −١ (١)

∵ يوجد نقطة حرجة عند (٠ ، ٦) ∴ صَ = ٠

∴ ٠ = ٣ أ (٠) + ٢ ب (٠) + جـ ∴ جـ = ٠

∵ يوجد نقطة حرجة عند (١ ، ٥) ∴ صَ = ٠

[illegible]

∴ معادلة المنحنى هي : ص = ٢ س٣ − ٣ س٢ + ٦

∴ صَ = ٦ س٢ − ٦ س ∴ صً = ١٢ س − ٦

، بوضع صً = ٠ ∴ س = $\frac{١}{٢}$ ومنها ص = $\frac{١١}{٢}$

لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات نضع س = ٠

∴ ص = ٦

• نعين نقط مساعدة : د (−١) = ١ ، د (٢) = ١٠

س	−١	٠	$\frac{١}{٢}$	١	٢
د (س)	١	٦	$\frac{١١}{٢}$	٥	١٠

[illegible]

∴ صَ = ٣ س٢ + ٢ أ س + ب

∴ صً = ٦ س + ٢ أ

∵ المنحنى يمر بالنقطة (−١ ، ١١)

∴ ١١ = −١ + أ − ب ∴ أ − ب = ١٢ (١)

، ∵ توجد نقطة انقلاب عند س = −١

∴ صفر = ٦ (−١) + ٢ أ ∴ أ = ٣ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ ب = −٩

∴ معادلة المنحنى : ص = س٣ + ٣ س٢ − ٩ س

∴ صَ = ٣ س٢ + ٦ س − ٩

، بوضع صَ = ٠ ∴ س = −٣ أ، ١

∴ عند س = −٣

قيمة عظمى محلية

∴ النقطة (−٣ ، ٢٧) نقطة قيمة عظمى محلية

، عند س = ١ قيمة صغرى محلية

∴ النقطة (١ ، −٥) نقطة قيمة صغرى محلية

، صً = ٦ س + ٦

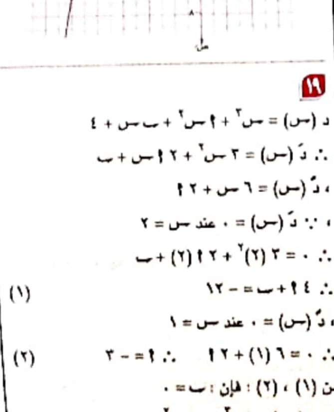
، بوضع صً = ٠ ∴ س = −١

• لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات

نضع س = ٠ ∴ ص = ٠

• نعين نقط مساعدة : عند س = ٢ فإن : ص = ٢

، عند س = −٥ فإن : ص = −٥



١٩

د (س) = س٣ + أ س٢ + ب س + ٤

∴ دَ (س) = ٣ س٢ + ٢ أ س + ب

، دً (س) = ٦ س + ٢ أ

، ∵ دَ (س) = ٠ عند س = ٢

∴ ٠ = ٣ (٢)٢ + ٢ أ (٢) + ب

∴ ٤ أ + ب = −١٢ (١)

، دً (س) = ٠ عند س = ١

∴ ٠ = ٦ (١) + ٢ أ ∴ أ = −٣ (٢)

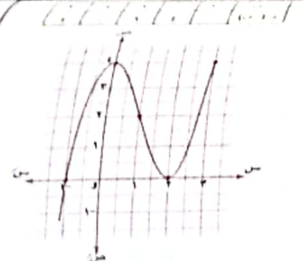
من (١) ، (٢) : فإن : ب = ٠

∴ د (س) = س٣ − ٣ س٢ + ٤

بوضع دَ (س) = ٠ ∴ ٣ س٢ − ٦ س = ٠

∴ س = ٠ أ، س = ٢

• توجد نقط مساعدة : د (−١) = ٠ ، د (٣) = ٤



٢٠

د (س) = { س + ١ ، س < ١ ؛ (س − ٣)٢ − ٢ ، س ≥ ١ }

، ∵ دَ (١⁻) ≠ دَ (١⁺)

∴ دَ (س) = { ١ ، س < ١ ؛ غير موجودة ، س = ١ ؛ ٢ (س − ٣) ، س > ١ }

، دً (س) = { ٠ ، س < ١ ؛ غير موجودة ، س = ١ ؛ ٢ ، س > ١ }

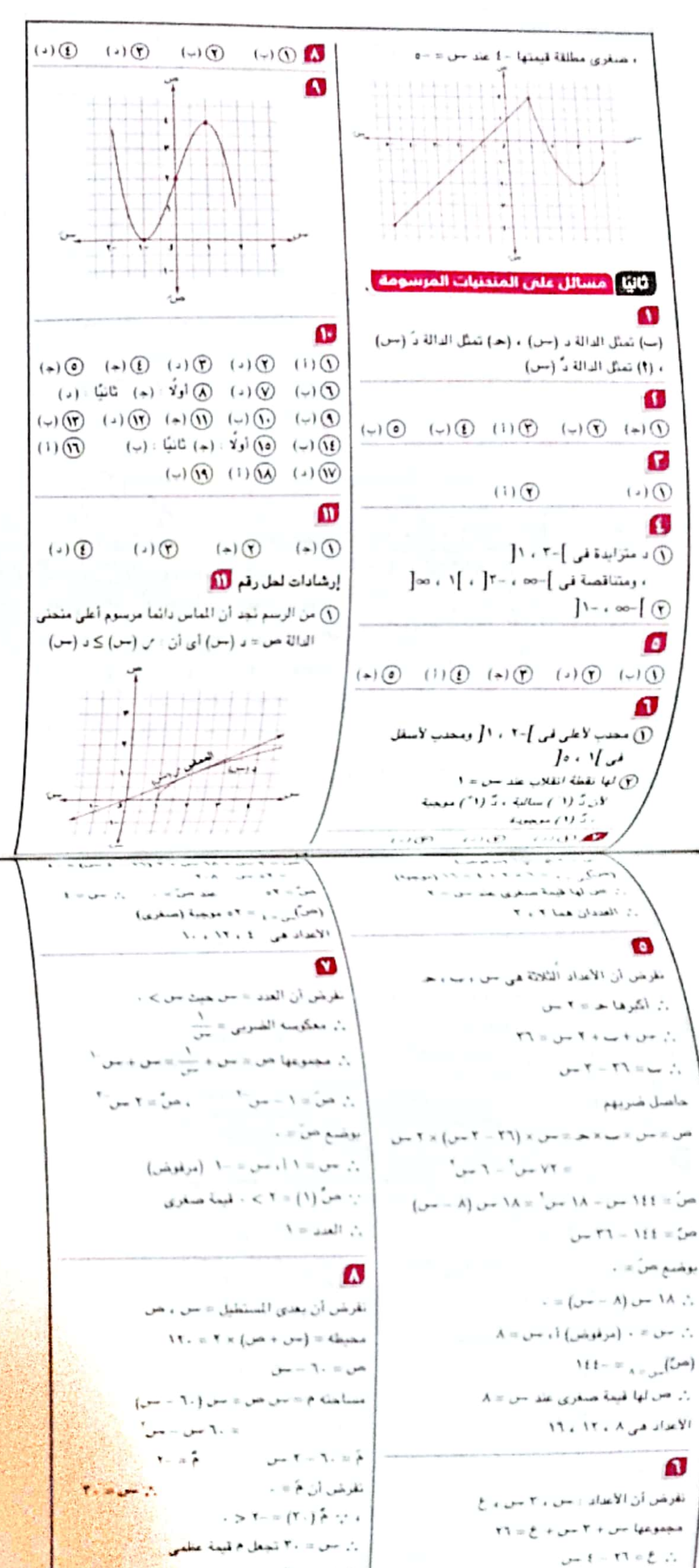
، دَ (س) = ٠ عند س < ١ لا تحقق

، عند س > ١ ∴ س = ٣

، ∵ دً (٣) = موجبة (صغرى)

س	−٥	١	٣	٤
د (س)	−٤	٢	−٢	−١

∴ يوجد قيمة عظمى مطلقة قيمتها ٢ عند س = ١



، صغرى مطلقة قيمتها −٤ عند س = −٥

ثانيًا مسائل على المنحنيات المرسومة

١

(ب) تمثل الدالة د (س) ، (حـ) تمثل الدالة دَ (س)
، (أ) تمثل الدالة دً (س)

٢

① (حـ) ② (ب) ③ (أ) ④ (ب) ⑤ (ب)

٣

① (د) ② (أ)

٤

① د متزايدة فى]−٣ ، ١[
، ومتناقصة فى]−∞ ، −٣[،]١ ، ∞[
②]−∞ ، −١[

٥

① (ب) ② (د) ③ (حـ) ④ (أ) ⑤ (حـ)

٦

① محدب لأعلى فى]−٢ ، ١[ومحدب لأسفل فى]١ ، ٥[
② لها نقطة انقلاب عند س = ١
لأن دً (١⁻) سالبة ، دً (١⁺) موجبة

٨ ① (ب) ② (ب) ③ (د) ④ (د)

٩

١٠

① (أ) ② (د) ③ (د) ④ (حـ) ⑤ (حـ)
⑥ (ب) ⑦ (د) ⑧ أولًا : (حـ) ثانيًا : (د)
⑨ (ب) ⑩ (ب) ⑪ (حـ) ⑫ (د) ⑬ (ب)
⑭ (ب) ⑮ أولًا : (حـ) ثانيًا : (ب) ⑯ (أ)
⑰ (د) ⑱ (أ) ⑲ (ب)

١١

① (حـ) ② (حـ) ③ (د) ④ (د)

إرشادات لحل رقم ١١

① من الرسم نجد أن المماس دائمًا مرسوم أعلى منحنى الدالة ص = د (س) أى أن : ر (س) ≥ د (س)

ص = ٥٢ عند صَ = ٠ ∴ س = ٤

(صً)$_{س=٤}$ = ٥٢ موجبة (صغرى)

الأعداد هى ٤ ، ١٢ ، ١٠

∴ ص لها قيمة صغرى عند س = ٦

∴ العددان هما ٦ ، ٢

٥

نفرض أن الأعداد الثلاثة هى س ، ب ، حـ
∴ أكبرها حـ = ٢ س
∴ س + ب + ٢ س = ٣٦
∴ ب = ٣٦ − ٣ س
حاصل ضربهم
ص = س × ب × حـ = س × (٣٦ − ٣ س) × ٢ س
= ٧٢ س^2 − ٦ س^3
صَ = ١٤٤ س − ١٨ س^2 = ١٨ س (٨ − س)
صً = ١٤٤ − ٣٦ س
بوضع صَ = ٠
∴ ١٨ س (٨ − س) = ٠
∴ س = ٠ (مرفوض) أ، س = ٨
(صً)$_{س=٨}$ = −١٤٤
∴ ص لها قيمة صغرى عند س = ٨
الأعداد هى ٨ ، ١٢ ، ١٦

٦

نفرض أن الأعداد : س ، ٣ س ، ع
مجموعها س + ٣ س + ع = ٢٦
∴ ع = ٢٦ − ٤ س
مجموع مربعاتها
ص = س^2 + (٣ س)^2 + (٢٦ − ٤ س)^2

٧

نفرض أن العدد = س حيث س > ٠
∴ معكوسه الضربى = $\frac{١}{س}$
∴ مجموعها ص = س + $\frac{١}{س}$ = س + س$^{-1}$
∴ صَ = ١ − س$^{-2}$ ، صً = ٢ س$^{-3}$
بوضع صَ = ٠
∴ س = ١ أ، س = −١ (مرفوض)
∵ صً (١) = ٢ > ٠ قيمة صغرى
∴ العدد = ١

٨

نفرض أن بعدى المستطيل = س ، ص
محيطه = (س + ص) × ٢ = ١٢٠
ص = ٦٠ − س
مساحته م = س ص = س (٦٠ − س)
= ٦٠ س − س^2
مَ = ٦٠ − ٢ س مً = −٢
نفرض أن مَ = ٠ ∴ س = ٣٠
، ∵ مً (٣٠) = −٢ < ٠
∴ س = ٣٠ تجعل م قيمة عظمى
∴ ص = ٣٠
∴ أكبر مساحة م = ٣٠ × ٣٠ = ٩٠٠ متر^2

② ∵ دَ (س) = ٣ س^2 + ٤ أ س + ب دالة من الدرجة الثانية الأحداثى السينى لنقطة رأس المنحنى هى $\frac{-٤أ}{٢ \times ٣} = \frac{-٢أ}{٣}$
ومن الرسم نجد أن الأحداثى السينى لرأس المنحنى يساوى ٢
∴ $\frac{-٢أ}{٣}$ = ٢ ∴ أ = −٣
، ∵ دَ (٢) = −١
∴ ١٢ − ٢٤ + ب = −١ ∴ ب = ١١
∴ د (س) = س^3 − ٦ س^2 + ١١ س + ١
∴ د (١) = ٧

③ ∵ دَ (س) = ميل المماس = ١
، ∵ د (س) > دَ (س)
∴ د (س) > ١ وذلك يتحقق لكل س > ٢
أى : س ∈]٢ ، ∞[

④

لاحظ أن د (س) ، دَ (س) ، دً (س) لهم نفس الاشارة لكل س ∈]ء ، ∞[

إجابات تمارين 14

١

نفرض أن أحد العددين هو س
∴ العدد الآخر هو ٣٠ − س
نفرض أن حاصل ضربهما ص = س (٣٠ − س)
= ٣٠ س − س^2
صَ = ٣٠ − ٢ س
نفرض أن صَ = ٠ ∴ س = ١٥
صً = −٢ لجميع قيم س
∴ ص عند س = ١٥ لها قيمة عظمى
العددان هما ١٥ ، ٣٠ − ١٥ = ١٥

٢

نفرض أن العددين هما س ، ١٦ − س
∴ مجموع مربعيهما ص = س^2 + (١٦ − س)^2
= ٢ س^2 − ٣٢ س + ٢٥٦
∴ صَ = ٤ س − ٣٢ ∴ صً = ٤
بوضع صَ = ٠ ∴ س = ٨
(صً)$_{س=٨}$ = ٤ (موجبة)
∴ عند س = ٨ لها قيمة صغرى
∴ العددان هما ٨ ، ٨

٣

نفرض أن العددين هما س ، $\frac{٣٦}{س}$
∴ مجموعهم ص = س + $\frac{٣٦}{س}$ = س + ٣٦ س$^{-1}$
∴ صَ = ١ − ٣٦ س$^{-2}$ ∴ صً = ٧٢ س$^{-3}$
∴ صَ = ٠ عندما ١ − ٣٦ س$^{-2}$ = ٠
∴ س^2 = ٣٦ ∴ س = ±٦
عند س = ٦ ∴ صً > ٠ قيمة صغرى
عند س = −٦ ∴ صً < ٠ قيمة عظمى
∴ أصغر ما يمكن عند س = ٦
∴ العددان ٦ ، ٦

٤

نفرض أن العددين هما س ، ٥ − س
حيث س < ٥ − س
∴ س < $\frac{٥}{٢}$ ∴ ص = س^3 + ٢ (٥ − س)^2
∴ صَ = ٣ س^2 + ٤ (٥ − س) (−١)
= ٣ س^2 + ٤ س − ٢٠
∴ صً = ٦ س + ٤
بوضع صَ = صفر ∴ ٣ س^2 + ٤ س − ٢٠ = ٠

٩

نفرض أن بعدى المستطيل س ، ص
محيطه ٢ (س + ص) = ل
∴ ص = $\frac{ل}{٢}$ − س
مساحته م = س ص = س ($\frac{ل}{٢}$ − س)
= $\frac{ل}{٢}$ س − س^2
مَ = $\frac{ل}{٢}$ − ٢ س مً = −٢
عند مَ = ٠ س = $\frac{ل}{٤}$
، ∵ مً ($\frac{ل}{٤}$) = −٢ < ٠ (عظمى)
أبعاد المستطيل هى $\frac{ل}{٤}$ ، $\frac{ل}{٤}$

١٠

نفرض أن نصف قطر دائرة القطاع = س
وطول القوس = ص
∴ المحيط = ٢ س + ص = ٣٠
∴ ص = ٣٠ − ٢ س
مساحته م = $\frac{١}{٢}$ س ص
م = $\frac{١}{٢}$ س (٣٠ − ٢ س) ∴ م = ١٥ س − س^2
∴ مَ = ١٥ − ٢ س ∴ مً = −٢
، مَ = ٠ عند س = ٧٫٥
، ∵ مً (٧٫٥) = −٢ < ٠ (عظمى)
∴ نصف قطر دائرته = ٧٫٥ سم

١١

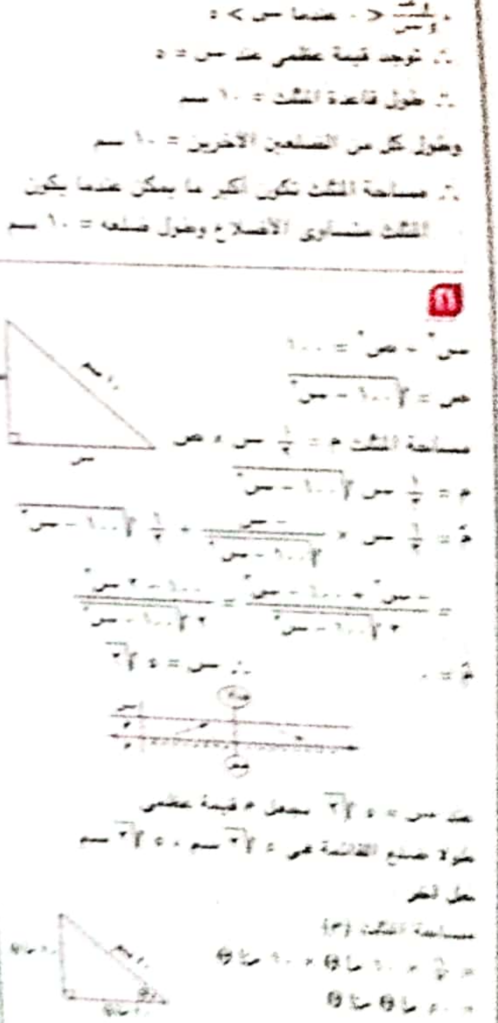
نفرض أن نصف قطر دائرته س
وطول القوس = ص ومحيطه الثابت = ل
٢ س + ص = ل ∴ ص = ل − ٢ س
مساحته م = $\frac{١}{٢}$ س ص = $\frac{١}{٢}$ س (ل − ٢ س)
= $\frac{١}{٢}$ ل س − س^2
∴ س = $\frac{١}{٤}$ ل ، ∵ مً ($\frac{١}{٤}$ ل) = −٢ < ٠
∴ عند س = $\frac{١}{٤}$ ل تجعل م قيمة عظمى
∴ هـ^ء = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{ل - ٢ (\frac{ل}{٤})}{\frac{ل}{٤}}$ = ٢^ء

١٢

نفرض أن نصف قطر دائرته = س
وطول القوس = ص
مساحته = $\frac{١}{٢}$ س ص = ١٦ ∴ ص = $\frac{٣٢}{س}$
المحيط ح = ٢ س + ص = ٢ س + $\frac{٣٢}{س}$
= ٢ س + ٣٢ س$^{-1}$ حَ = ٢ − ٣٢ س$^{-2}$
∴ حً = ٦٤ س$^{-3}$
بوضع حَ = ٠ ∴ س = ±٤
، ∵ حً (٤) = ١
∴ ح لها قيمة صغرى عند س = ٤
∴ طول نصف القطر = ٤ سم
، ص = $\frac{٣٢}{٤}$ = ٨ ∴ هـ^ء = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{٨}{٤}$ = ٢^ء

١٣

نفرض أن بعدى المستطيل هما : س ، ص
∴ ٢ س + ص = ٨٠٠ متر
∴ ص = ٨٠٠ − ٢ س
نفرض أن مساحة المستطيل = م = س ص
∴ م = س (٨٠٠ − ٢ س) = ٨٠٠ س − ٢ س^2
مَ = ٨٠٠ − ٤ س
بوضع مَ = ٠ ∴ س = ٢٠٠ متر



∴ س = ٠ (مرفوض) ، س = ٥

∵ دم/دس > ٠ عندما س < ٥

، دم/دس < ٠ عندما س > ٥

∴ توجد قيمة عظمى عند س = ٥

∴ طول قاعدة المثلث = ١٠ سم

وطول كل من الضلعين الآخرين = ١٠ سم

∴ مساحة المثلث تكون أكبر ما يمكن عندما يكون المثلث متساوي الأضلاع وطول ضلعه = ١٠ سم

٤١

س² + ص² = ١٠٠

ص = √(١٠٠ − س²)

مساحة المثلث م = ½ س × ص

م = ½ س √(١٠٠ − س²)

م' = ½ س × (−س)/√(١٠٠ − س²) + ½ √(١٠٠ − س²)

= (−س² + ١٠٠ − س²)/(٢√(١٠٠ − س²)) = (١٠٠ − ٢س²)/(٢√(١٠٠ − س²))

م' = ٠ ∴ س = ٥√٢

عند س = ٥√٢ تحقق م قيمة عظمى

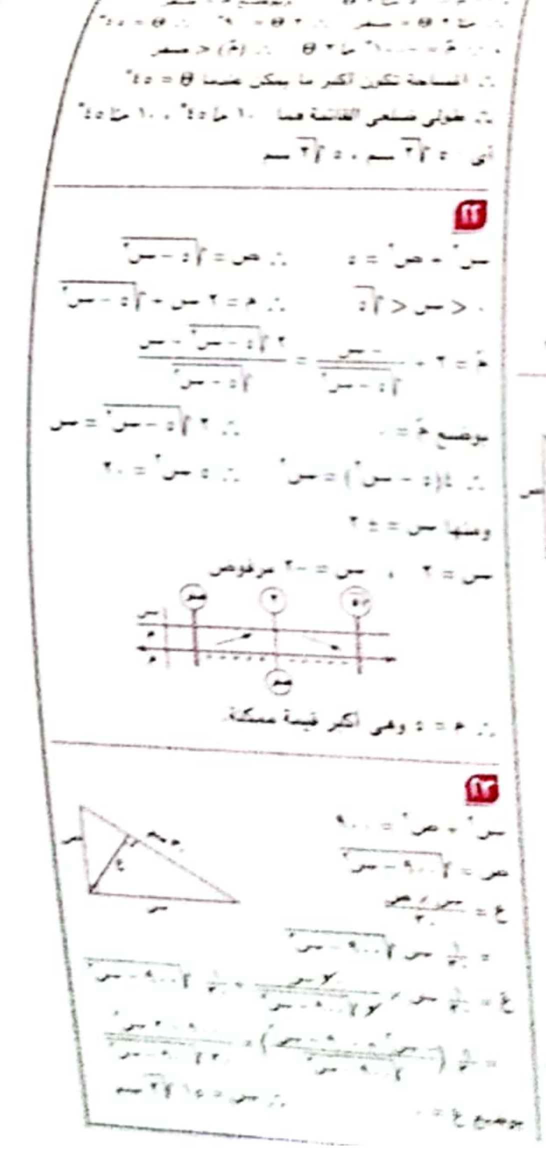
طولا ضلعي القائمة هي ٥√٢ سم ، ٥√٢ سم

حل آخر

مساحة المثلث (م)

= ½ × ١٠ جتا θ × ١٠ جا θ

= ٥٠ جا θ جتا θ



∵ م' = ٠ ∴ ٢θ = ٩٠° ∴ θ = ٤٥°

، ∵ م'' = −١٠٠ جا ٢θ ∴ (م'') < صفر

∴ المساحة تكون أكبر ما يمكن عندما θ = ٤٥°

∴ طولي ضلعي القائمة هما ١٠ جا ٤٥° ، ١٠ جتا ٤٥°

أي ٥√٢ سم ، ٥√٢ سم

٤٢

س² + ص² = ٤ ∴ ص = √(٤ − س²)

٠ < س < √٤ ∴ م = ٢س + √(٤ − س²)

م' = ٢ + (−س)/√(٤ − س²) = (٢√(٤ − س²) − س)/√(٤ − س²)

بوضع م' = ٠ ∴ ٢√(٤ − س²) = س

∴ ٤(٤ − س²) = س² ∴ ٥س² = ٢٠

ومنها س = ±٢

س = ٢ ، س = −٢ مرفوض

∴ م = ٥ وهي أكبر قيمة ممكنة.

٤٣

س² + ص² = ٩٠٠

ص = √(٩٠٠ − س²)

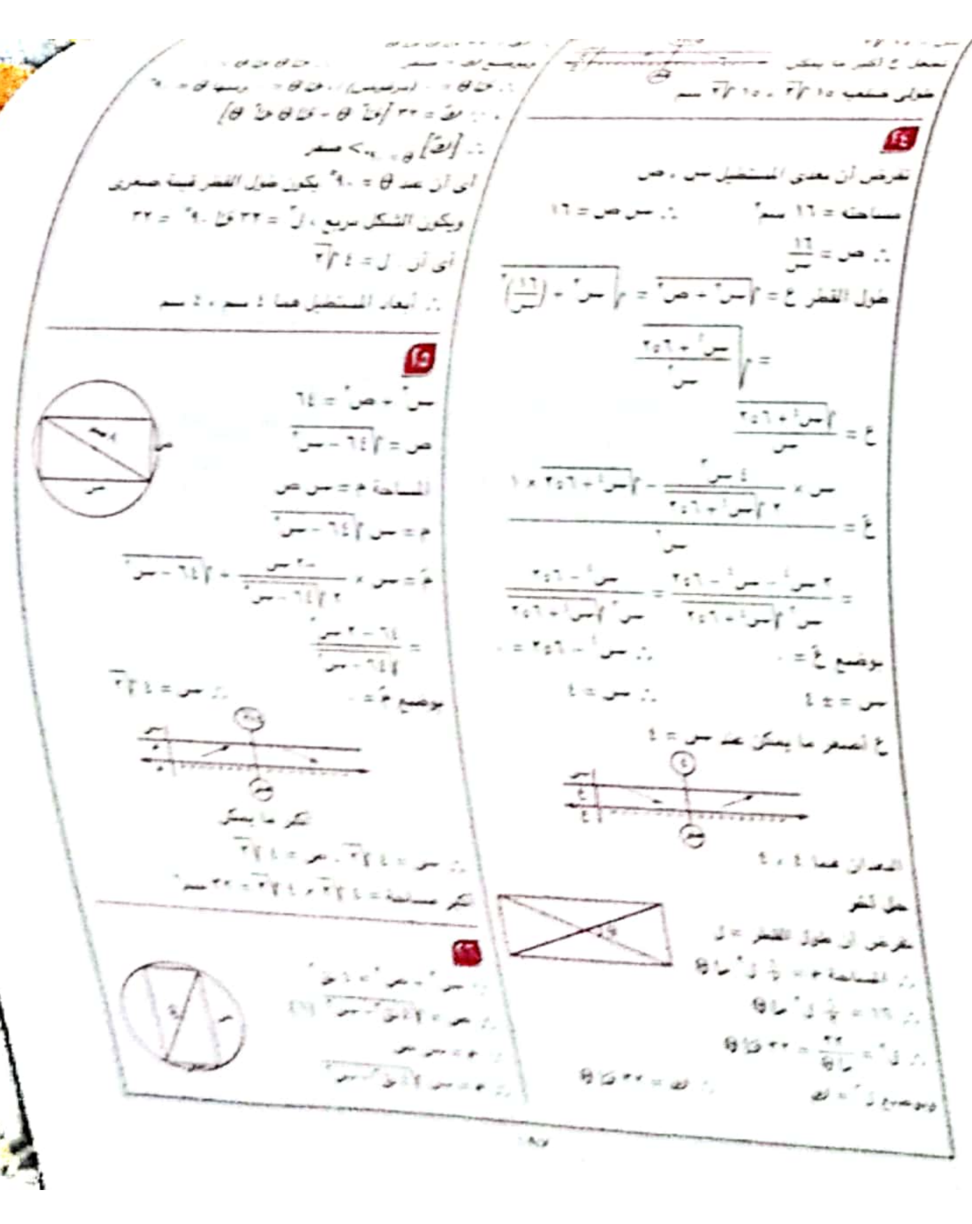
ع = س ص/٣٠

= 1/30 س √(٩٠٠ − س²)

ع' = 1/30 س × (−٢س)/(٢√(٩٠٠ − س²)) + 1/30 √(٩٠٠ − س²)

= (٩٠٠ − ٢س²)/(٣٠√(٩٠٠ − س²))

بوضع ع' = ٠ ∴ س = ١٥√٢ سم



تجعل ع أكبر ما يمكن

طولي ضلعيه ١٥√٢ ، ١٥√٢ سم

٤٤

نفرض أن بعدي المستطيل س ، ص

مساحته = ١٦ سم² ∴ س ص = ١٦

∴ ص = ١٦/س

طول القطر ع = √(س² + ص²) = √(س² + (١٦/س)²)

= √((س⁴ + ٢٥٦)/س²)

ع = √(س⁴ + ٢٥٦)/س

ع' = [س × ٤س³/(٢√(س⁴ + ٢٥٦)) − √(س⁴ + ٢٥٦) × ١]/س²

= (٢س⁴ − س⁴ − ٢٥٦)/(س² √(س⁴ + ٢٥٦)) = (س⁴ − ٢٥٦)/(س² √(س⁴ + ٢٥٦))

بوضع ع' = ٠ ∴ س⁴ − ٢٥٦ = ٠

س = ±٤ ∴ س = ٤

ع أصغر ما يمكن عند س = ٤

البعدان هما ٤ ، ٤

حل آخر

نفرض أن طول القطر = ل

∴ المساحة م = ½ ل² جا θ

∴ ١٦ = ½ ل² جا θ

∴ ل² = ٣٢/جا θ = ٣٢ قتا θ

وبوضع ل² = ق ∴ ق = ٣٢ قتا θ

∴ ق' = −٣٢ قتا θ ظتا θ ، بوضع ق' = صفر

∴ قتا θ = ٠ (مرفوض) ، ظتا θ = ٠ ومنها θ = ٩٠°

∵ ق'' = ٣٢ [قتا³ θ + قتا θ ظتا² θ]

∴ [ق'']θ=٩٠° > صفر

أي أن عند θ = ٩٠° يكون طول القطر قيمة صغرى

ويكون الشكل مربع ، ل² = ٣٢ قتا ٩٠° = ٣٢

أي أن ل = ٤√٢

∴ أبعاد المستطيل هما ٤ سم ، ٤ سم

٤٥

س² + ص² = ٦٤

ص = √(٦٤ − س²)

المساحة م = س ص

م = س √(٦٤ − س²)

م' = س × (−٢س)/(٢√(٦٤ − س²)) + √(٦٤ − س²)

= (٦٤ − ٢س²)/√(٦٤ − س²)

بوضع م' = ٠ ∴ س = ٤√٢

أكبر ما يمكن

∴ س = ٤√٢ ، ص = ٤√٢

أكبر مساحة = ٤√٢ × ٤√٢ = ٣٢ سم²

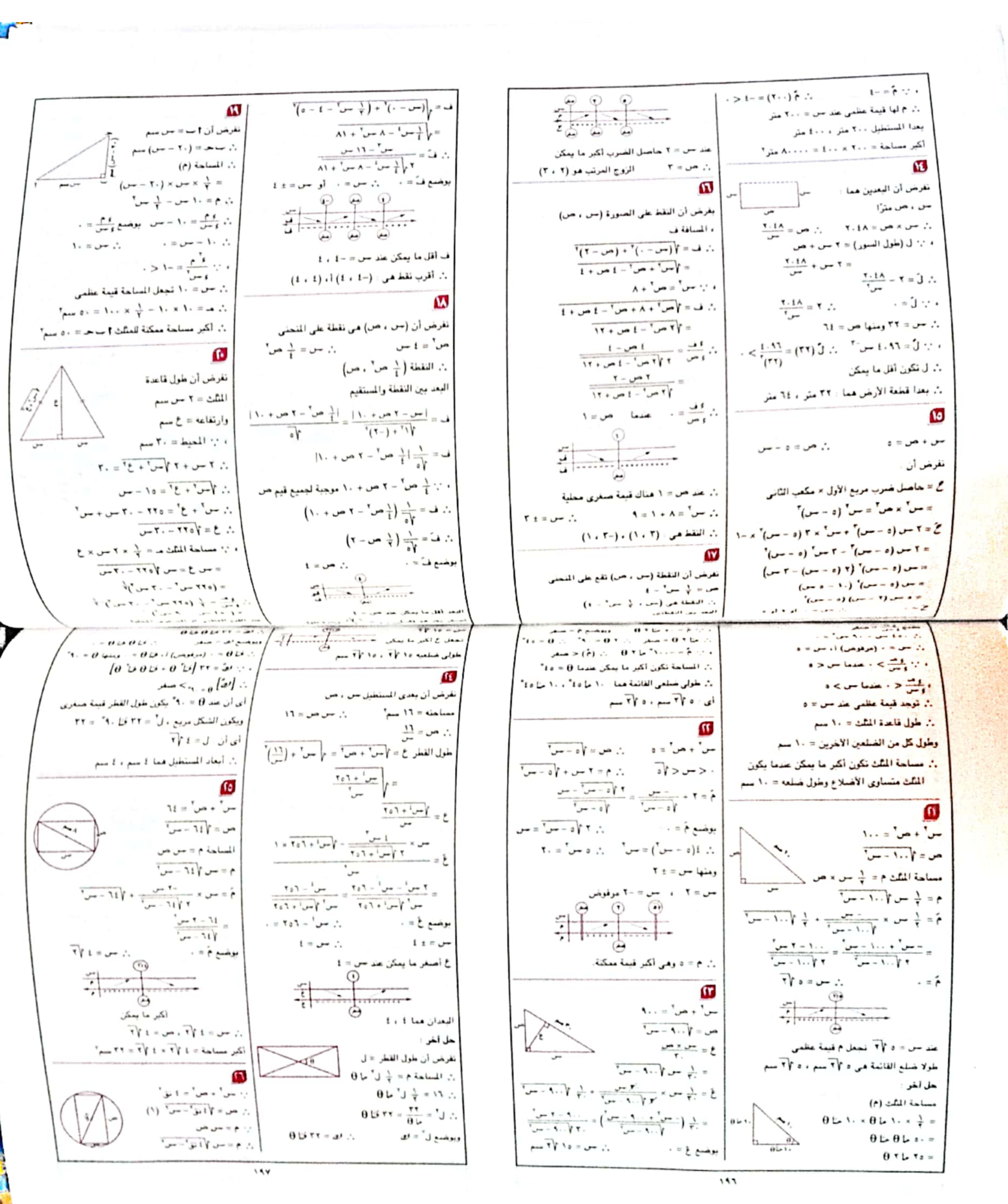
٤٦

س² + ص² = ٤ نق²

∴ ص = √(٤ نق² − س²)

م = س ص

∴ م = س √(٤ نق² − س²)



∵ م̈ = −٤ ∴ م̈ (٢٠٠) = −٤ < ٠

∴ م لها قيمة عظمى عند س = ٢٠٠ متر

بعدا المستطيل ٢٠٠ متر ، ٤٠٠ متر

أكبر مساحة = ٢٠٠ × ٤٠٠ = ٨٠٠٠٠ متر²

١٤

نفرض أن البعدين هما : س ، ص مترًا

∴ س × ص = ٢٠٤٨ ∴ ص = $\frac{٢٠٤٨}{س}$

∵ ل (طول السور) = ٢ س + ص

= ٢ س + $\frac{٢٠٤٨}{س}$

∴ ل̀ = ٢ − $\frac{٢٠٤٨}{س^٢}$

∵ ل̀ = ٠ ∴ ٢ = $\frac{٢٠٤٨}{س^٢}$

∴ س = ٣٢ ومنها ص = ٦٤

∵ ل̈ = ٤٠٩٦ س^−٣ ∴ ل̈ (٣٢) = $\frac{٤٠٩٦}{(٣٢)^٣}$ > ٠

∴ ل تكون أقل ما يمكن

∴ بعدا قطعة الأرض هما : ٣٢ متر ، ٦٤ متر

١٥

س + ص = ٥ ∴ ص = ٥ − س

نفرض أن :

ح = حاصل ضرب مربع الأول × مكعب الثاني

= س² × ص³ = س² (٥ − س)³

ح̀ = ٢ س (٥ − س)³ + س² × ٣ (٥ − س)² × −١

= ٢ س (٥ − س)³ − ٣ س² (٥ − س)²

= س (٥ − س)² (٢ (٥ − س) − ٣ س)

= س (٥ − س)² (١٠ − ٥ س)

عند س = ٢ حاصل الضرب أكبر ما يمكن

∴ ص = ٣ الزوج المرتب هو (٢ ، ٣)

١٦

بفرض أن النقط على الصورة (س ، ص)

، المسافة ف

∴ ف = $\sqrt{(س − ٠)^٢ + (ص − ٢)^٢}$

= $\sqrt{س^٢ + ص^٢ − ٤ ص + ٤}$

∵ س² = ص² + ٨

∴ ف = $\sqrt{ص^٢ + ٨ + ص^٢ − ٤ ص + ٤}$

= $\sqrt{٢ ص^٢ − ٤ ص + ١٢}$

∴ $\frac{ءف}{ءص}$ = $\frac{٤ ص − ٤}{٢\sqrt{٢ ص^٢ − ٤ ص + ١٢}}$

= $\frac{٢ ص − ٢}{\sqrt{٢ ص^٢ − ٤ ص + ١٢}}$

∴ $\frac{ءف}{ءص}$ = ٠ عندما ص = ١

∴ عند ص = ١ هناك قيمة صغرى محلية

∴ س² = ٨ + ١ = ٩ ∴ س = ± ٣

∴ النقط هي (٣ ، ١) ، (−٣ ، ١)

١٧

نفرض أن النقطة (س ، ص) تقع على المنحنى

ص = $\frac{١}{٢}$ س² − ٤

∴ النقطة هي (س ، $\frac{١}{٢}$ س² − ٤)

ف = $\sqrt{(س − ٠)^٢ + (\frac{١}{٢} س^٢ − ٤ − ٥)^٢}$

= $\sqrt{\frac{١}{٤} س^٤ − ٨ س^٢ + ٨١}$

∴ ف̀ = $\frac{س^٣ − ١٦ س}{٢\sqrt{\frac{١}{٤} س^٤ − ٨ س^٢ + ٨١}}$

بوضع ف̀ = ٠ ∴ س = ٠ أو س = ± ٤

ف أقل ما يمكن عند س = −٤ ، ٤

∴ أقرب نقط هي : (−٤ ، ٤) ، (٤ ، ٤)

١٨

نفرض أن (س ، ص) هي نقطة على المنحنى

ص² = ٤ س ∴ س = $\frac{١}{٤}$ ص²

∴ النقطة ($\frac{١}{٤}$ ص² ، ص)

البعد بين النقطة والمستقيم

ف = $\frac{|س − ٢ ص + ١٠|}{\sqrt{١^٢ + (−٢)^٢}}$ = $\frac{|\frac{١}{٤} ص^٢ − ٢ ص + ١٠|}{\sqrt{٥}}$

ف = $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ |$\frac{١}{٤}$ ص² − ٢ ص + ١٠|

∵ $\frac{١}{٤}$ ص² − ٢ ص + ١٠ موجبة لجميع قيم ص

∴ ف = $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ ($\frac{١}{٤}$ ص² − ٢ ص + ١٠)

∴ ف̀ = $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ ($\frac{١}{٢}$ ص − ٢)

بوضع ف̀ = ٠ ∴ ص = ٤

١٩

نفرض أن أ ب = س سم

∴ ب حـ = (٢٠ − س) سم

∴ المساحة (م)

= $\frac{١}{٢}$ × س × (٢٠ − س)

∴ م = ١٠ س − $\frac{١}{٢}$ س²

∴ $\frac{ءم}{ءس}$ = ١٠ − س بوضع $\frac{ءم}{ءس}$ = ٠

∴ ١٠ − س = ٠ ∴ س = ١٠

∵ $\frac{ء^٢م}{ءس^٢}$ = −١ < ٠

∴ س = ١٠ تجعل المساحة قيمة عظمى

∴ م = ١٠ × ١٠ − $\frac{١}{٢}$ × ١٠٠ = ٥٠ سم²

∴ أكبر مساحة ممكنة للمثلث أ ب حـ = ٥٠ سم²

٢٠

نفرض أن طول قاعدة المثلث = ٢ س سم

وارتفاعه = ع سم

∵ المحيط = ٣٠ سم

∴ ٢ س + ٢ $\sqrt{س^٢ + ع^٢}$ = ٣٠

∴ $\sqrt{س^٢ + ع^٢}$ = ١٥ − س

∴ س² + ع² = ٢٢٥ − ٣٠ س + س²

∴ ع = $\sqrt{٢٢٥ − ٣٠ س}$

∵ مساحة المثلث م = $\frac{١}{٢}$ × ٢ س × ع

= س ع = س $\sqrt{٢٢٥ − ٣٠ س}$

= (٢٢٥ س² − ٣٠ س³)^½

∴ س = ٠ (مرفوض) أو س = ٥

∵ $\frac{ءم}{ءس}$ > ٠ عندما س < ٥

، $\frac{ءم}{ءس}$ < ٠ عندما س > ٥

∴ توجد قيمة عظمى عند س = ٥

∴ طول قاعدة المثلث = ١٠ سم

وطول كل من الضلعين الآخرين = ١٠ سم

∴ مساحة المثلث تكون أكبر ما يمكن عندما يكون المثلث متساوي الأضلاع وطول ضلعه = ١٠ سم

٢١

س² + ص² = ١٠٠

ص = $\sqrt{١٠٠ − س^٢}$

مساحة المثلث م = $\frac{١}{٢}$ س × ص

م = $\frac{١}{٢}$ س $\sqrt{١٠٠ − س^٢}$

م̀ = $\frac{١}{٢}$ س × $\frac{−س}{\sqrt{١٠٠ − س^٢}}$ + $\frac{١}{٢}$ $\sqrt{١٠٠ − س^٢}$

= $\frac{−س^٢ + ١٠٠ − س^٢}{٢\sqrt{١٠٠ − س^٢}}$ = $\frac{١٠٠ − ٢ س^٢}{٢\sqrt{١٠٠ − س^٢}}$

م̀ = ٠ ∴ س = ٥ $\sqrt{٢}$

عند س = ٥ $\sqrt{٢}$ تجعل م قيمة عظمى

طولا ضلع القائمة هي ٥ $\sqrt{٢}$ سم ، ٥ $\sqrt{٢}$ سم

حل آخر :

مساحة المثلث (م)

= $\frac{١}{٢}$ × ١٠ جا θ × ١٠ جتا θ

= ٥٠ جا θ جتا θ

= ٢٥ جا ٢θ

∴ م̀ = ٥٠ جتا ٢θ بوضع م̀ = صفر

∴ جتا ٢θ = صفر ∴ ٢θ = ٩٠° ∴ θ = ٤٥°

∵ م̈ = −١٠٠ جا ٢θ ∴ (م̈) < صفر

∴ المساحة تكون أكبر ما يمكن عندما θ = ٤٥°

∴ طولي ضلعي القائمة هما ١٠ جا ٤٥° ، ١٠ جتا ٤٥°

أي : ٥ $\sqrt{٢}$ سم ، ٥ $\sqrt{٢}$ سم

٢٢

س² + ص² = ٥ ∴ ص = $\sqrt{٥ − س^٢}$

٠ < س < $\sqrt{٥}$ ∴ م = ٢ س + $\sqrt{٥ − س^٢}$

م̀ = ٢ + $\frac{−س}{\sqrt{٥ − س^٢}}$ = $\frac{٢\sqrt{٥ − س^٢} − س}{\sqrt{٥ − س^٢}}$

بوضع م̀ = ٠ ∴ ٢ $\sqrt{٥ − س^٢}$ = س

∴ ٤(٥ − س²) = س² ∴ ٥ س² = ٢٠

ومنها س = ± ٢

س = ٢ ، س = −٢ مرفوض

∴ م = ٥ وهي أكبر قيمة ممكنة.

٢٣

س² + ص² = ٩٠٠

ص = $\sqrt{٩٠٠ − س^٢}$

ع = $\frac{س × ص}{٣٠}$

= $\frac{١}{٣٠}$ س $\sqrt{٩٠٠ − س^٢}$

ع̀ = $\frac{١}{٣٠}$ س × $\frac{−٢ س}{٢\sqrt{٩٠٠ − س^٢}}$ + $\frac{١}{٣٠}$ $\sqrt{٩٠٠ − س^٢}$

= $\frac{١}{٣٠}$ ($\frac{−س^٢ + ٩٠٠ − س^٢}{\sqrt{٩٠٠ − س^٢}}$) = $\frac{٩٠٠ − ٢ س^٢}{٣٠\sqrt{٩٠٠ − س^٢}}$

بوضع ع̀ = ٠ ∴ س = ١٥ $\sqrt{٢}$ سم

تجعل ع أكبر ما يمكن

طولي ضلعيه ١٥ $\sqrt{٢}$ ، ١٥ $\sqrt{٢}$ سم

٢٤

نفرض أن بعدي المستطيل س ، ص

مساحته = ١٦ سم² ∴ س ص = ١٦

∴ ص = $\frac{١٦}{س}$

طول القطر ع = $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$ = $\sqrt{س^٢ + (\frac{١٦}{س})^٢}$

= $\sqrt{\frac{س^٤ + ٢٥٦}{س^٢}}$

ع = $\frac{\sqrt{س^٤ + ٢٥٦}}{س}$

ع̀ = $\frac{س × \frac{٤ س^٣}{٢\sqrt{س^٤ + ٢٥٦}} − \sqrt{س^٤ + ٢٥٦} × ١}{س^٢}$

= $\frac{٢ س^٤ − س^٤ − ٢٥٦}{س^٢\sqrt{س^٤ + ٢٥٦}}$ = $\frac{س^٤ − ٢٥٦}{س^٢\sqrt{س^٤ + ٢٥٦}}$

بوضع ع̀ = ٠ ∴ س⁴ − ٢٥٦ = ٠

س = ± ٤ ∴ س = ٤

ع أصغر ما يمكن عند س = ٤

البعدان هما ٤ ، ٤

حل آخر :

نفرض أن طول القطر = ل

∴ المساحة م = $\frac{١}{٢}$ ل² جا θ

∴ ١٦ = $\frac{١}{٢}$ ل² جا θ

∴ ل² = $\frac{٣٢}{جا θ}$ = ٣٢ قا θ

وبوضع ل² = ق ∴ ق = ٣٢ قا θ

∴ قا θ جتا θ = ٠ ...

∴ قا θ = ٠ (مرفوض) أو قا θ = ... ومنها θ = ٩٠°

∵ ق̈ = ٣٢ [قا³ θ + قا θ ظا² θ]

∴ [ق̈]θ = ٩٠° > صفر

أي أن عند θ = ٩٠° يكون طول القطر قيمة صغرى

ويكون الشكل مربع ، ل² = ٣٢ قا ٩٠° = ٣٢

أي أن : ل = ٤ $\sqrt{٢}$

∴ أبعاد المستطيل هما ٤ سم ، ٤ سم

٢٥

س² + ص² = ٦٤

ص = $\sqrt{٦٤ − س^٢}$

المساحة م = س ص

م = س $\sqrt{٦٤ − س^٢}$

م̀ = س × $\frac{−٢ س}{٢\sqrt{٦٤ − س^٢}}$ + $\sqrt{٦٤ − س^٢}$

= $\frac{٦٤ − ٢ س^٢}{\sqrt{٦٤ − س^٢}}$

بوضع م̀ = ٠ ∴ س = ٤ $\sqrt{٢}$

أكبر ما يمكن

∴ س = ٤ $\sqrt{٢}$ ، ص = ٤ $\sqrt{٢}$

أكبر مساحة = ٤ $\sqrt{٢}$ × ٤ $\sqrt{٢}$ = ٣٢ سم²

٢٦

∵ س² + ص² = ٤ نق²

∴ ص = $\sqrt{٤ نق^٢ − س^٢}$ (١)

∵ م = س ص

∴ م = س $\sqrt{٤ نق^٢ − س^٢}$

$م' = س \times \frac{-٢ س}{٢\sqrt{٤ نق^{٢} - س^{٢}}} + \sqrt{٤ نق^{٢} - س^{٢}}$

$= \frac{٤ نق^{٢} - ٢ س^{٢}}{\sqrt{٤ نق^{٢} - س^{٢}}}$

∵ م' = ٠ عند س = $\sqrt{٢}$ نق

، ∵ م'' < ٠ عند س = $\sqrt{٢}$ نق

توجد قيمة عظمى

وبالتعويض من (١) ص = $\sqrt{٢}$ نق

س = ص = $\sqrt{٢}$ نق

∴ الشكل مربع مساحته = $\sqrt{٢}$ نق × $\sqrt{٢}$ نق

= ٢ $نق^{٢}$ وحدة مربعة

٢٧

نفرض أن طول ضلع المربع س حيث س ∈]٠ ، ١٠[

∴ طول قاعدة الصندوق = ٢٠ − ٢ س

ارتفاع الصندوق = س

∴ حجم الصندوق (ح)

= $(٢٠ - ٢ س)^{٢} \times س$

= $س (٢٠ - ٢ س)^{٢}$

= $٤ س (١٠ - س)^{٢} = ٤٠٠ س - ٨٠ س^{٢} + ٤ س^{٣}$

ح' = ٤٠٠ − ١٦٠ س + ١٢ $س^{٢}$

ح' = ٠ فإن س = ١٠ مرفوض ، س = $\frac{١٠}{٣}$

ح'' = −١٦٠ + ٢٤ س

$(ح'')_{س = \frac{١٠}{٣}} = -٨٠$

∴ طول ضلع المربع فى الجزء المقطوع = $\frac{١٠}{٣}$ سم

٢٨

أبعاد متوازى المستطيلات

٢٤ − ٢ س

، ١٥ − ٢ س ، س

[illegible]

حجم العلبة (ح)

= (٢٤ − ٢ س) × (١٥ − ٢ س) (س)

= ٢ س (١٢ − س) (١٥ − ٢ س)

= ٣٦٠ س − ٧٨ $س^{٢}$ + ٤ $س^{٣}$

ح' = ٣٦٠ − ١٥٦ س + ١٢ $س^{٢}$

بوضع ح' = ٠ س = ١٠ (مرفوض) ، س = ٣

ح'' = −١٥٦ + ٢٤ س

$(ح'')_{س = ٣} < ٠$ (عظمى)

أبعاد العلبة هى ١٨ ، ٩ ، ٣ سم

٢٩

نفرض أن طول ضلع القاعدة = س ، وارتفاعه = ع

∴ ٨ س + ٤ ع = ٢٤٠

∴ ٢ س + ع = ٦٠

∴ ع = ٦٠ − ٢ س (١)

، ∵ ح = $س^{٢}$ ع

ومن (١) ∴ ح = ٦٠ $س^{٢}$ − ٢ $س^{٣}$

∴ ح' = ١٢٠ س − ٦ $س^{٢}$ وعند ح' = ٠

∴ س = ٠ (مرفوض) أ، س = ٢٠

، ∵ ح'' = ١٢٠ − ١٢ س ، عند س = ٢٠

فإن ح'' = −١٢٠ < ٠ ∴ توجد نهاية عظمى

∴ عند س = ٢٠ سم يكون الحجم أكبر ما يمكن

ومن (١) ∴ ع = ٢٠ سم

∴ أبعاد متوازى المستطيلات ذو أكبر حجم هى ٢٠ ، ٢٠ ، ٢٠ سم

٣٠

نفرض أن بعدى القاعدة = س ، ٢ س والارتفاع ع

∴ س + ٢ س + ع = ١٨٠

∴ ع = ١٨٠ − ٣ س

حجم متوازى المستطيلات (ح)

= س × ٢ س × ع = ٢ $س^{٢}$ (١٨٠ − ٣ س)

= ٣٦٠ $س^{٢}$ − ٦ $س^{٣}$

ح' = ٧٢٠ س − ١٨ $س^{٢}$

ح' = ٠ ∴ س = ٠ (مرفوض) أو س = ٤٠

ح'' = ٧٢٠ − ٣٦ س

$(ح'')_{س = ٤٠} < ٠$ أكبر ما يمكن

الأبعاد هى ٤٠ سم ، ٨٠ سم ، ٦٠ سم

٣١

نفرض أن طول ضلع

القاعدة المربعة = س سم

وارتفاع الصندوق = ع سم

، ∵ المساحة الكلية = ٢ $س^{٢}$ + ٤ س ع

∴ ٢ $س^{٢}$ + ٤ س ع = ٣٨٤

∴ ع = $\frac{٣٨٤ - ٢ س^{٢}}{٤ س} = \frac{١٩٢ - س^{٢}}{٢ س}$

∴ حجم الصندوق (ح) = $س^{٢}$ ع

= $\frac{س^{٢} (١٩٢ - س^{٢})}{٢ س}$

= ٩٦ س − $\frac{١}{٢}$ $س^{٣}$

∴ $\frac{دح}{دس}$ = ٩٦ − $\frac{٣}{٢}$ $س^{٢}$

، ∵ $\frac{دح}{دس}$ = ٠ ∴ $\frac{٣}{٢}$ $س^{٢}$ = ٩٦

∴ $س^{٢}$ = ٦٤ ∴ س = ٨

، ∵ $\frac{د^{٢}ح}{دس^{٢}}$ = −٣ س

∴ عندما س = ٨ فإن $\frac{د^{٢}ح}{دس^{٢}}$ < صفر

∴ الحجم أكبر ما يمكن

أكبر حجم (ح) = ٩٦ س − $\frac{١}{٢}$ $س^{٣}$

= ٩٦ × ٨ − $\frac{١}{٢}$ × $(٨)^{٣}$ = ٥١٢ $سم^{٣}$

٣٢

نفرض أن طولى ضلعى قاعدة متوازى المستطيلات هما ٢ س ، س وارتفاعه = ص

∴ حجم متوازى المستطيلات = س × ٢ س × ص

= ٢ $س^{٢}$ ص

∴ ٢ $س^{٢}$ ص = ٥٧٦

∴ ص = $\frac{٢٨٨}{س^{٢}}$

، ∵ المساحة الكلية (م)

= ٦ س ص + ٤ $س^{٢}$

∴ م = ٦ س × $\frac{٢٨٨}{س^{٢}}$ + ٤ $س^{٢}$

= ١٧٢٨ $س^{-١}$ + ٤ $س^{٢}$

∴ $\frac{دم}{دس}$ = −١٧٢٨ $س^{-٢}$ + ٨ س

، بوضع $\frac{دم}{دس}$ = ٠ ∴ $\frac{١٧٢٨}{س^{٢}}$ = ٨ س

∴ $س^{٣}$ = ٢١٦ ∴ س = ٦ سم

، ∵ $\frac{د^{٢}م}{دس^{٢}} = \frac{٣٤٥٦}{س^{٣}} + ٨$

، عند س = ٦ ∴ $\frac{د^{٢}م}{دس^{٢}}$ > صفر

∴ المساحة أقل ما يمكن

∴ الأبعاد هى ٦ سم ، ١٢ سم ، ٨ سم

٣٣

نفرض أن طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة = نق سم

، ارتفاع الأسطوانة = ع سم

، حجم الأسطوانة = ح $سم^{٣}$

، ∵ نق + ع = ٣٠ ∴ ع = ٣٠ − نق

، ∵ ح = ط $نق^{٢}$ ع = ط $نق^{٢}$ (٣٠ − نق)

= ٣٠ ط $نق^{٢}$ − ط $نق^{٣}$ (١)

∴ $\frac{دح}{دنق}$ = ٦٠ ط نق − ٣ ط $نق^{٢}$

، $\frac{د^{٢}ح}{دنق^{٢}}$ = ٦٠ ط − ٦ ط نق

[illegible]

∴ نق = ٢٠ سم

$\left(\frac{د^{٢}ح}{دنق^{٢}}\right)_{نق = ٢٠}$ = ٦٠ ط − ١٢٠ ط = −٦٠ ط < صفر

وعندها يكون الحجم أكبر ما يمكن وبالتعويض فى (١)

∴ ح = ١٢٠٠٠ ط − ٨٠٠٠ ط = ٤٠٠٠ ط $سم^{٣}$

٣٤

نفرض أن طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة = نق

ارتفاع الأسطوانة ع سم

∴ حجم الأسطوانة ح = π $نق^{٢}$ ع

∴ مساحة الأسطوانة الكلية = ٢ π نق (ع + نق)

= ١٥٠ π

∴ ع = $\frac{٧٥ - نق^{٢}}{نق}$

∴ ح = π $نق^{٢}$ × $\frac{٧٥ - نق^{٢}}{نق}$ = ٧٥ π نق − π $نق^{٣}$

ح' = ٧٥ π − ٣ π $نق^{٢}$

ح' = ٠ ∴ نق = ٥ سم

ح'' = −٦ π نق

$(ح'')_{نق = ٥}$ < ٠ (عظمى)

∴ أكبر حجم = $ح_{نق = ٥}$ = ٧٥ π (٥) − π $(٥)^{٣}$

= ٢٥٠ π $سم^{٣}$

٣٥

نفرض أن طول نصف قطر قاعدته = نق

وارتفاعه = ع

ح (سعته) = π $نق^{٢}$ ع = ٨٠٠٠ π

∴ ع = $\frac{٨٠٠٠}{نق^{٢}}$

مساحته السطحية م = π $نق^{٢}$ + ٢ π نق ع

= π $نق^{٢}$ + ٢ π نق × $\frac{٨٠٠٠}{نق^{٢}}$

= π $نق^{٢}$ + ١٦٠٠٠ π $نق^{-١}$

[illegible]

م' = ٠ عندما ٢ π نق − ١٦٠٠٠ π $نق^{-٢}$ = ٠

∴ نق − $\frac{٨٠٠٠}{نق^{٢}}$ = ٠ ∴ $نق^{٣}$ = ٨٠٠٠

∴ نق = ٢٠

، ∵ م'' = ٦ π > ٠ أقل ما يمكن

∴ الأبعاد نق = ٢٠ سم ، ع = ٢٠ سم

٣٦

الحجم ك = π $نق^{٢}$ ع ∴ ع = $\frac{ك}{π نق^{٢}}$

المادة التى تصنع منها العلبة = المساحة الكلية للأسطوانة × السُمك

م = ٢ π نق (ع + نق) × هـ

= ٢ π نق × $\left(\frac{ك}{π نق^{٢}} + نق\right)$ × هـ

= ٢ هـ (ك $نق^{-١}$ + π $نق^{٢}$)

م' = ٢ هـ (٢ π نق − ك $نق^{-٢}$)

∴ م'' = ٢ هـ (٢ π + ٢ ك $نق^{-٣}$)

م' = ٠ فإن نق = $\sqrt[٣]{\frac{ك}{٢ π}}$

عند نق = $\sqrt[٣]{\frac{ك}{٢ π}}$ فإن م'' > ٠ (قيمة صغرى)

∴ $\frac{ع}{نق} = \frac{ك}{π \times نق^{٣}} = \frac{ك}{π \times \left(\frac{ك}{٢ π}\right)} = \frac{٢}{١}$

٣٧

الربح = سعر البيع − سعر التكلفة

ر = (١٠٠ − ٠.٠٢ س) × س − (٤٠ س + ١٥٠٠٠)

= −٠.٠٢ $س^{٢}$ + ٦٠ س − ١٥٠٠٠

ر' = −٠.٠٤ س + ٦٠

ر' = ٠ ∴ س = ١٥٠٠

ر'' = −٠.٠٤ < ٠ عظمى

∴ عدد الوحدات التى يجب إنتاجها = ١٥٠٠

٣٨

$س^{٢} + ص^{٢} = ٤٠٠$

ص = $\sqrt{٤٠٠ - س^{٢}}$

مجموع العددين م = س + ص

= س + $\sqrt{٤٠٠ - س^{٢}}$

م' = ١ + $\frac{-٢ س}{٢\sqrt{٤٠٠ - س^{٢}}}$ = ١ + $\frac{-س}{\sqrt{٤٠٠ - س^{٢}}}$

م' = ٠ ∴ س = $\sqrt{٤٠٠ - س^{٢}}$

∴ $س^{٢}$ = ٤٠٠ − $س^{٢}$ ∴ $س^{٢}$ = ٢٠٠

∴ س = ١٠ $\sqrt{٢}$

$(م'')_{س = ١٠\sqrt{٢}}$ < ٠ (أكبر ما يمكن)

∴ العددين س = ١٠ $\sqrt{٢}$ ، ص = ١٠ $\sqrt{٢}$

٣٩

∵ د (س) = $\frac{٦}{س^{٢} + ٣}$

∴ ميل المماس ر (س) = $\frac{-١٢ س}{(س^{٢} + ٣)^{٢}}$

∴ ر' (س) = $\frac{-١٢ (س^{٢} + ٣)^{٢} + ١٢ س \times ٤ س (س^{٢} + ٣)}{(س^{٢} + ٣)^{٤}}$

= $\frac{٣٦ (س^{٢} - ١)}{(س^{٢} + ٣)^{٣}}$

ميل المماس ر (س) يكون أكبر ما يمكن أو أصغر ما يمكن عندما يكون ر' (س) = صفر

∴ $س^{٢}$ − ١ = ٠ ∴ س = ١ أ، س = −١

∴ توجد قيمة عظمى عند س = −١

وهى (−١ ، $\frac{٣}{٢}$) ، توجد قيمة صغرى عند س = ١

وهى (١ ، $\frac{٣}{٢}$)

∴ ميل المماس يكون أكبر ما يمكن عند النقطة (−١ ، $\frac{٣}{٢}$)

، ميل المماس يكون أصغر ما يمكن عند النقطة (١ ، $\frac{٣}{٢}$)

٤٠

نعرض أى مثلث وليكن س ص ع

∴ مساحة المثلث (م) = $\frac{١}{٢}$ أ ب جا س

∴ $\frac{دم}{دس}$ = $\frac{١}{٢}$ أ ب جتا س وبوضع $\frac{دم}{دس}$ = ٠

∴ $\frac{١}{٢}$ أ ب جتا س = ٠ ∴ جتا س = ٠

∴ س = ٩٠°

، ∵ $\frac{د^{٢}م}{دس^{٢}}$ = −$\frac{١}{٢}$ أ ب جا س

وبوضع س = ٩٠°

∴ $\frac{د^{٢}م}{دس^{٢}}$ = −$\frac{١}{٢}$ أ ب < ٠

أى أن عند س = ٩٠° فهناك قيمة عظمى للدالة أى أن مساحة المثلث أكبر ما يمكن عندما تكون الزاوية بين الضلعين اللذين طولاهما أ ، ب قائمة أى أن الضلع الثالث قطر فى الدائرة المارة برؤوس المثلث.

٤١

نفرض أن ص = $\frac{س}{أ س^{٢} + ب}$

ص' = $\frac{(أ س^{٢} + ب) (١) - س (٢ أ س)}{(أ س^{٢} + ب)^{٢}}$

= $\frac{ب - أ س^{٢}}{(أ س^{٢} + ب)^{٢}}$

ص' = ٠ ∴ س = ± $\sqrt{\frac{ب}{أ}}$

ص'' = $\frac{-٢ أ س (أ س^{٢} + ب)^{٢} - (ب - أ س^{٢}) (٢ (٢ أ س) (أ س^{٢} + ب))}{(أ س^{٢} + ب)^{٤}}$

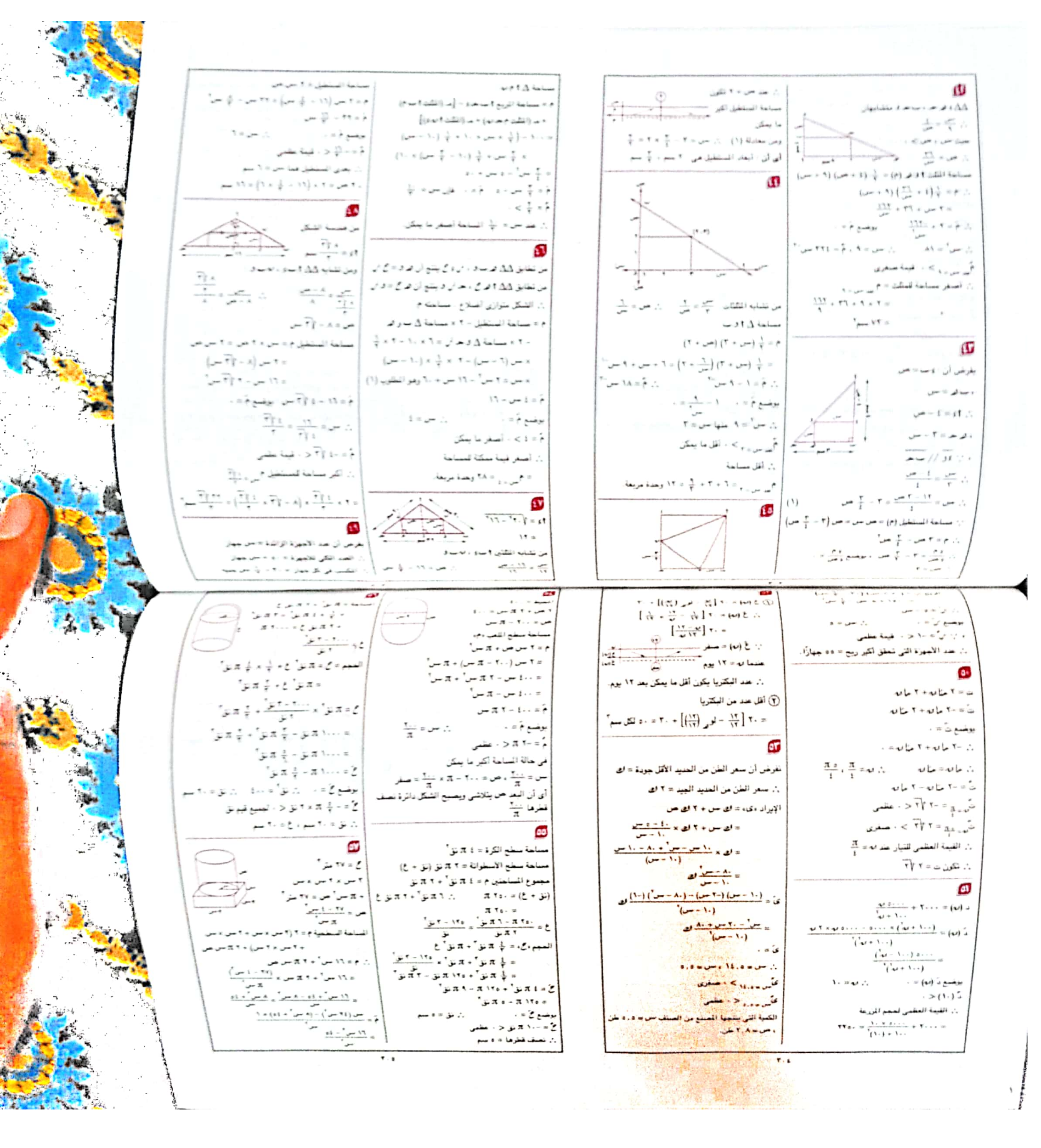
= $\frac{٢ أ^{٢} س^{٣} - ٦ أ ب س}{(أ س^{٢} + ب)^{٣}}$

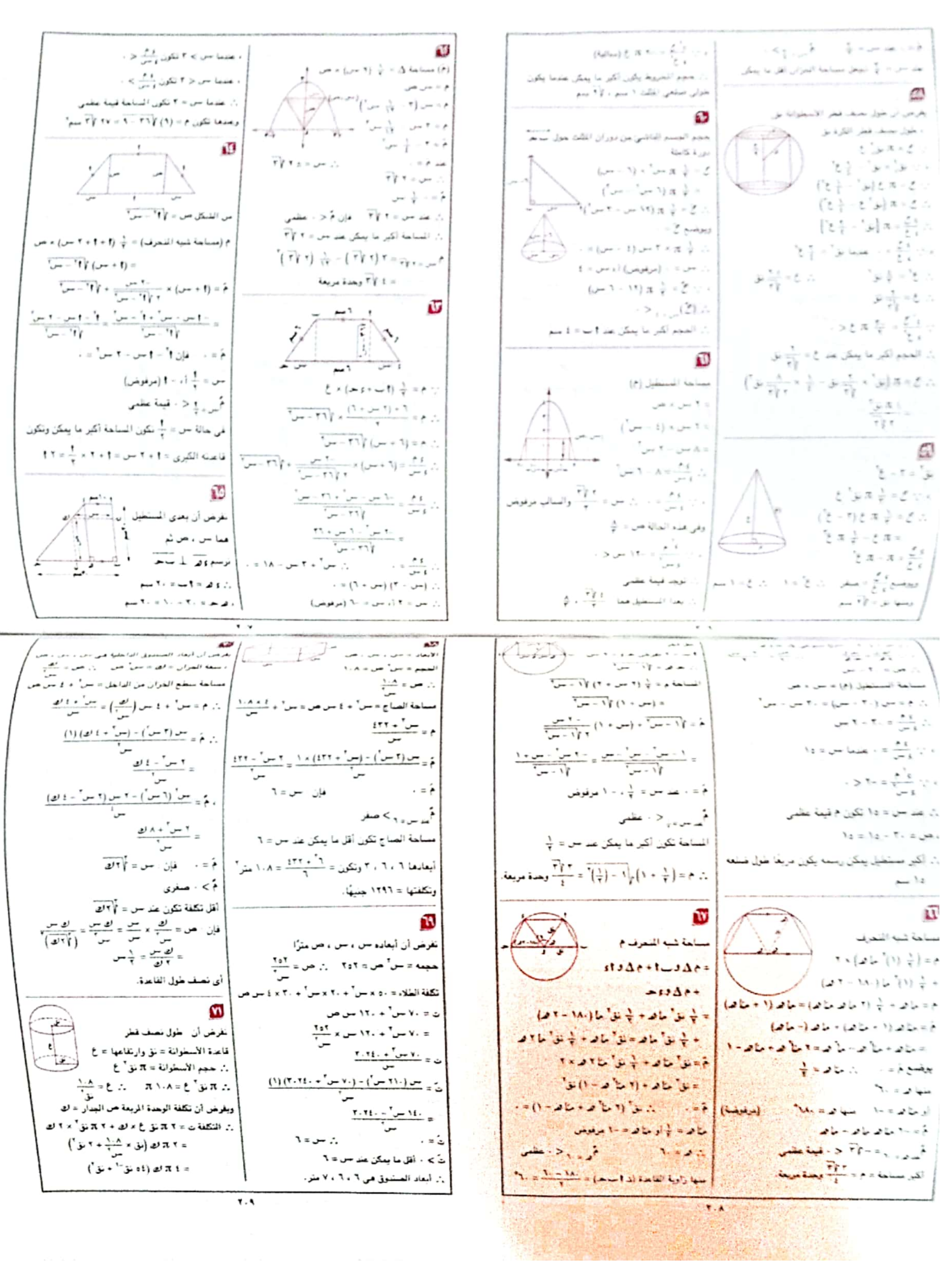
، $ص''_{س = \sqrt{\frac{ب}{أ}}}$ < ٠ (قيمة عظمى)

∴ $(ص)_{س = \sqrt{\frac{ب}{أ}}} = \frac{\sqrt{\frac{ب}{أ}}}{أ \left(\frac{ب}{أ}\right) + ب} = \frac{\sqrt{\frac{ب}{أ}}}{٢ ب}$

= $\frac{١}{٢ \sqrt{أ ب}}$

∴ $\frac{س}{أ س^{٢} + ب} \le \frac{١}{٢ \sqrt{أ ب}}$ لجميع قيم أ ، ب الموجبة.





٦٨

الأبعاد = س ، س ، ص

الحجم = س² ص = ١٠٨

∴ ص = ١٠٨ / س²

مساحة الصاج = س² + ٤ س ص = س² + (٤ × ١٠٨) / س

م = (س³ + ٤٣٢) / س

مَ = (س (٣ س²) − (س³ + ٤٣٢) × ١) / س² = (٢ س³ − ٤٣٢) / س²

مَ = ٠ فإن س = ٦

مً عند س = ٦ > صفر

مساحة الصاج تكون أقل ما يمكن عند س = ٦

أبعادها ٦ ، ٦ ، ٣ وتكون = (٦³ + ٤٣٢) / ٦ = ١٠٨ متر²

وتكلفتها = ١٢٩٦ جنيهًا.

٦٩

نفرض أن أبعاده س ، س ، ص مترًا

حجمه = س² ص = ٢٥٢ ∴ ص = ٢٥٢ / س²

تكلفة الطلاء = ٥٠ × س² + ٢٠ × س² + ٣٠ × ٤ س ص

ت = ٧٠ س² + ١٢٠ س ص

= ٧٠ س² + ١٢٠ س × ٢٥٢ / س²

ت = (٧٠ س³ + ٣٠٢٤٠) / س

تَ = (س (٢١٠ س²) − (٧٠ س³ + ٣٠٢٤٠) (١)) / س²

= (١٤٠ س³ − ٣٠٢٤٠) / س²

تَ = ٠ ∴ س = ٦

تً > ٠ أقل ما يمكن عند س = ٦

∴ أبعاد الصندوق هي ٦ ، ٦ ، ٧ متر.

٧٠

نفرض أن أبعاد الصندوق الداخلية هي س ، س ، ص

، سعة الخزان = ك = س² ص ∴ ص = ك / س²

مساحة سطح الخزان من الداخل = س² + ٤ س ص

∴ م = س² + ٤ س (ك / س²) = (س³ + ٤ ك) / س

∴ مَ = (س (٣ س²) − (س³ + ٤ ك) (١)) / س²

= (٢ س³ − ٤ ك) / س²

، مً = (س² (٦ س²) − ٢ س (٢ س³ − ٤ ك)) / س⁴

= (٢ س³ + ٨ ك) / س³

مَ = ٠ فإن س = ∛(٢ ك)

مً > ٠ صغرى

أقل تكلفة تكون عند س = ∛(٢ ك)

فإن ص = ك / س² × س / س = ك س / س³ = ك س / (∛(٢ ك))³

= ك س / ٢ ك = ½ س

أي نصف طول القاعدة.

٧١

نفرض أن طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة = نق وارتفاعها = ع

∴ حجم الأسطوانة = π نق² ع

∴ π نق² ع = ١٠٨ π ∴ ع = ١٠٨ / نق²

ويفرض أن تكلفة الوحدة المربعة من الجدار = ك

∴ التكلفة ت = ٢ π نق ع × ك + ٢ π نق² × ٢ ك

= ٢ π ك (نق × ١٠٨ / نق² + ٢ نق²)

= ٤ π ك (٥٤ نق⁻¹ + نق²)

∴ $ت' = ٤\pi ك(-٥٤ نق^{-٢} + ٢ نق)$

، $ت'' = ٤\pi ك(١٠٨ نق^{-٣} + ٢)$

بوضع $ت' =$ صفر

∴ $-٥٤ نق^{-٢} + ٢ نق = ٠$ ∴ $نق = ٣$

∵ $(ت'')_{نق=٣} = ٤\pi ك\left(\frac{١٠٨}{٢٧} + ٢\right) > ٠$ قيمة صغرى

∴ أقل تكلفة عند نق = ٣ ، ع = ١٢

٧٢

بفرض طول ضلع المربع = س

وطول نصف قطر الدائرة = نق

∴ $٤ س + ٢\pi نق = ٨٠$

∴ $س = ٢٠ - \frac{١}{٢}\pi نق$ (١)

∵ مجموع مساحتي الشكلين (م)

$م = س^{٢} + \pi نق^{٢}$ (٢)

من (١) ، (٢):

∴ $م = (٢٠ - \frac{١}{٢}\pi نق)^{٢} + \pi نق^{٢}$

∴ $\frac{ءم}{ءنق} = ٢(٢٠ - \frac{١}{٢}\pi نق) \times (-\frac{١}{٢}\pi) + ٢\pi نق$

$= -٢٠\pi + \frac{١}{٢}\pi^{٢} نق + ٢\pi نق$

، عند $\frac{ءم}{ءنق} =$ صفر ∴ $\frac{١}{٢}\pi نق + ٢ نق = ٢٠$

$نق(٢ + \frac{١}{٢}\pi) = ٢٠$ ∴ $نق = \frac{٢٠}{٢ + \frac{١}{٢}\pi} = \frac{٤٠}{٤ + \pi}$

∵ $\frac{ء^{٢}م}{ءنق^{٢}} = \frac{١}{٢}\pi^{٢} + ٢\pi >$ صفر

∴ المساحة قيمة صغرى عندما $نق = \frac{٤٠}{\pi + ٤}$

∴ $س = ٢٠ - \frac{٢٠\pi}{\pi + ٤} = \frac{٨٠ + ٢٠\pi - ٢٠\pi}{\pi + ٤}$

∴ $س = \frac{٨٠}{\pi + ٤}$ ∴ $س = ٢ نق$

∴ عندما يكون مجموع مساحتي الدائرة والمربع قيمة صغرى فإن طول ضلع المربع = طول قطر الدائرة.

٧٣

بفرض أن طول ضلع المربع = س

طول نصف قطر الدائرة = نق

∴ $٤ س + ٢\pi نق = ٣٤$

∴ $س = \frac{١٧}{٢} - \frac{١}{٢}\pi نق$ ، $م = س^{٢} + \pi نق^{٢}$

∴ $م = \frac{٢٨٩}{٤} - \frac{١٧}{٢}\pi نق + \frac{١}{٤}\pi^{٢} نق^{٢} + \pi نق^{٢}$

$م' = -\frac{١٧}{٢}\pi + \frac{١}{٢}\pi^{٢} نق + ٢\pi نق$

$م' = ٠$ عند $نق = \frac{\frac{١٧}{٢}}{\frac{١}{٢}\pi + ٢} = \frac{١٧}{\pi + ٤}$

$م'' = \frac{١}{٢}\pi^{٢} + ٢\pi > ٠$ قيمة صغرى

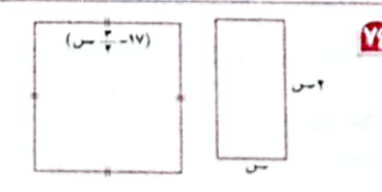
∴ طول الجزء الأول $= ٤ س = ٣٤ - ٢\pi\left(\frac{١٧}{\pi + ٤}\right)$

$= \frac{٣٤\pi + ١٣٦ - ٣٤\pi}{\pi + ٤}$

$= \frac{١٣٦}{\pi + ٤}$

طول الجزء الثاني $= ٢\pi نق = ٢\pi \times \frac{١٧}{\pi + ٤} = \frac{٣٤\pi}{\pi + ٤}$

٧٤



نفرض أن عرض المستطيل = س

∴ طوله = ٢ س سم

∴ محيط المستطيل = (س + ٢ س) × ٢ = ٦ س

∴ محيط المربع = ٦٨ − ٦ س

∴ طول ضلع المربع $= \frac{٦٨ - ٦ س}{٤}$

$= (١٧ - \frac{٣}{٢} س)$ سم

∴ مجموع مساحتي المستطيل والمربع (م)

$= س \times ٢ س + (١٧ - \frac{٣}{٢} س)^{٢}$

∴ $م = ٢ س^{٢} + (١٧ - \frac{٣}{٢} س)^{٢}$

∴ $\frac{ءم}{ءس} = ٤ س + ٢(١٧ - \frac{٣}{٢} س) \times \frac{-٣}{٢}$

$= ٤ س + \frac{٩}{٢} س - ٥١$

$= \frac{١٧}{٢} س - ٥١$

∵ $\frac{ءم}{ءس} = ٠ \Leftarrow س = ٦$ ، $\frac{ء^{٢}م}{ءس^{٢}} = \frac{١٧}{٢} > ٠$

∴ مجموع المساحتين أصغر ما يمكن

عندما س = ٦ سم

٧٥

المحيط $= ٢ ص + س + ٢ \times \frac{٥}{٨} س$

$= ٢ ص + \frac{٩}{٤} س$

$= ١٢٠$ سم

∴ $ص = ٦٠ - \frac{٩}{٨} س$

مساحة النافذة (م) $= س ص + \frac{١}{٢}(س)(\frac{٣}{٨} س)$

$= س ص + \frac{٣}{١٦} س^{٢}$

∴ $م = س(٦٠ - \frac{٩}{٨} س) + \frac{٣}{١٦} س^{٢}$

$= ٦٠ س - \frac{١٥}{١٦} س^{٢}$

$م' = ٦٠ - \frac{١٥}{٨} س$

$م' = ٠$ عند س = ٣٢ سم

$م'' = -\frac{١٥}{٨} < ٠$ عظمى محلية عند س = ٣٢

بعدا المستطيل هما ٣٢ سم ، ٢٤ سم

٧٦

بفرض أن بعدي المستطيل

= ص ، ٢ س

∴ نصف قطر (نصف الدائرة) = س

محيط النافذة $= ٢ س + ٢ ص + \frac{١}{٢}(٢\pi س)$

$= ٢ ص + ٢ س + \pi س = ٦$

∴ $ص = ٣ - س - \frac{\pi}{٢} س$

مساحة النافذة $= م = ٢ س \times ص + \frac{١}{٢}\pi س^{٢}$

$= ٢ س(٣ - س - \frac{\pi}{٢} س)$

$+ \frac{١}{٢}\pi س^{٢} = ٦ س - ٢ س^{٢} - \pi س^{٢}$

$- \pi س^{٢} + \frac{١}{٢}\pi س^{٢}$

$= ٦ س - ٢ س^{٢} - \frac{١}{٢}\pi س^{٢}$

$م' = ٦ - ٤ س - \pi س$

بوضع $م' = ٠$ ∴ $س = \frac{٦}{٤ + \pi}$

$م' = -٤ - \pi < ٠$ قيمة عظمى

∴ نصف قطر (نصف الدائرة) التي يجعل المساحة أكبر ما يمكن هو $\frac{٦}{٤ + \pi}$

٧٧

نفرض أن أ = (س ، ص) تنتمي لمنحنى الدالة

$ص = (س - ٢)^{٢}$

∴ م (مساحة Δ أ ب و)

$= \frac{١}{٢} س ص = \frac{١}{٢} س (س - ٢)^{٢}$

$= \frac{١}{٢} س^{٣} - ٢ س^{٢} + ٢ س$

∴ $\frac{ءم}{ءس} = \frac{٣}{٢} س^{٢} - ٤ س + ٢$ وبوضع $\frac{ءم}{ءس} = ٠$

∴ $٣ س^{٢} - ٨ س + ٤ = ٠$

∴ $(٣ س - ٢)(س - ٢) = ٠$

∴ $س = \frac{٢}{٣}$ أ، $س = ٢$

∴ م تكون أكبر مساحة عند $س = \frac{٢}{٣}$

ومنها $ص = \frac{١٦}{٩}$

∴ النقطة $أ = (\frac{٢}{٣} ، \frac{١٦}{٩})$

٧٨

من هندسة الشكل نجد أن:

$أ ب = قتا \theta$

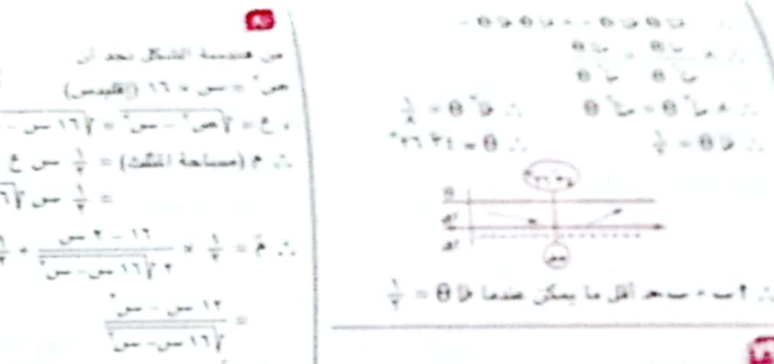
$ب حـ = ٨ قا \theta$

، وبفرض ك = أ ب + ب حـ

∴ $ك = قتا \theta + ٨ قا \theta$

∴ $\frac{ءك}{ء\theta} = - قتا \theta ظتا \theta + ٨ قا \theta ظا \theta$

وبوضع $\frac{ءك}{ء\theta} = ٠$



∴ ٨ × $\frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}$ = $\frac{\text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta}$

∴ ٨ جا³ θ = جتا³ θ ∴ ظا³ θ = $\frac{1}{8}$

∴ ظا θ = $\frac{1}{2}$ ∴ θ ≈ ٢٦° ٣٤'

∴ أب + ب حـ أقل ما يمكن عندما ظا θ = $\frac{1}{2}$

بفرض أن ق (∠ د) = ق (∠ حـ) = θ

في Δ أ د هـ : أ د = $\frac{1}{\text{جا}\,\theta}$

في Δ أ ب حـ : أ حـ = $\frac{3\sqrt{3}}{\text{جتا}\,\theta}$

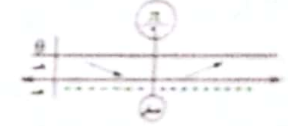
∵ ص = أ د + أ حـ = $\frac{1}{\text{جا}\,\theta}$ + $\frac{3\sqrt{3}}{\text{جتا}\,\theta}$

∴ $\frac{\text{د ص}}{\text{د}\,\theta}$ = $\frac{-\text{جتا}\,\theta}{\text{جا}^2\,\theta}$ + $\frac{3\sqrt{3}\ \text{جا}\,\theta}{\text{جتا}^2\,\theta}$

وبوضع $\frac{\text{د ص}}{\text{د}\,\theta}$ = صفر ∴ $3\sqrt{3}$ جا³ θ = جتا³ θ

∴ ظا³ θ = $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ ∴ ظا θ = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

∴ θ = $\frac{\pi}{6}$



∴ أ د + أ حـ أصغر ما يمكن عندما θ = $\frac{\pi}{6}$

∴ ظا (حـ) = $\frac{\text{أب}}{\text{ب حـ}}$ ⇐ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ = $\frac{\text{أب}}{3\sqrt{3}}$

∴ أب = ٣

∴ هـ ب = ٣ − ١ = ٢ سم



من هندسة الشكل نجد أن :

ص² = س × ١٦ (إقليدس)

، ع = $\sqrt{\text{ص}^2 - \text{س}^2}$ = $\sqrt{16\,\text{س} - \text{س}^2}$

∴ م (مساحة المثلث) = $\frac{1}{2}$ س ع

= $\frac{1}{2}$ س $\sqrt{16\,\text{س} - \text{س}^2}$

∴ مَ = $\frac{1}{2}$ × $\frac{16 - 2\,\text{س}}{2\sqrt{16\,\text{س} - \text{س}^2}}$ + $\frac{1}{2}$ $\sqrt{16\,\text{س} - \text{س}^2}$

= $\frac{12\,\text{س} - \text{س}^2}{\sqrt{16\,\text{س} - \text{س}^2}}$

وبوضع مَ = ٠ ∴ ١٢ س − س² = ٠

∴ س (١٢ − س) = ٠

∴ س = ٠ (مرفوض) أ، س = ١٢

، ∵ مَ تتغير اشارتها حول س = ١٢

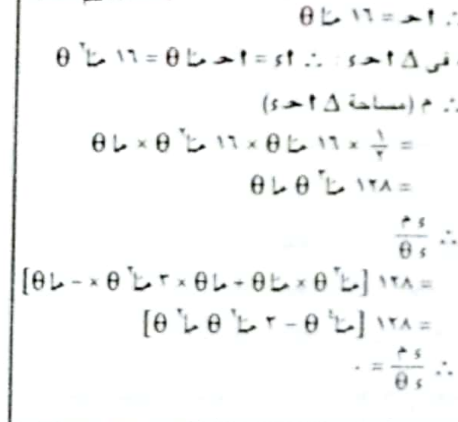
من الموجب إلى السالب

∴ توجد قيمة عظمى للمساحة

عند س = ١٢

ومنها ع = ٤ $\sqrt{3}$

∴ م = $\frac{1}{2}$ × ١٢ × ٤ $\sqrt{3}$ = ٢٤ $\sqrt{3}$ سم²



حل آخر :

في Δ أ ب حـ

∵ أ ب = ١٦ سم

∴ أ حـ = ١٦ جتا θ

، في Δ أ حـ د : ∴ أ د = أ حـ جتا θ = ١٦ جتا² θ

∴ م (مساحة Δ أ حـ د)

= $\frac{1}{2}$ × ١٦ جتا θ × ١٦ جتا² θ × جا θ

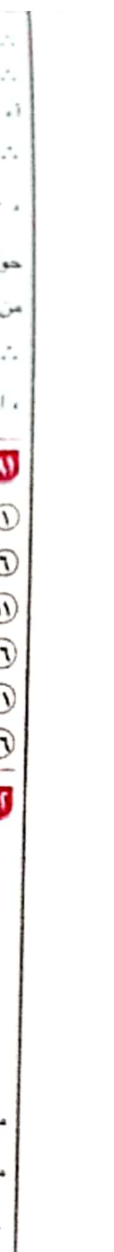
= ١٢٨ جتا³ θ جا θ

∴ $\frac{\text{د م}}{\text{د}\,\theta}$

= ١٢٨ [جتا³ θ × جتا θ + جا θ × ٣ جتا² θ × − جا θ]

= ١٢٨ [جتا⁴ θ − ٣ جتا² θ جا² θ]

∴ $\frac{\text{د م}}{\text{د}\,\theta}$ = ٠



∴ جتا² θ − ٣ جا² θ جتا² θ = ٠

∴ جتا θ = ٠ ومنها θ = $\frac{\pi}{2}$ (مرفوض)

أ، جتا² θ = ٣ جا² θ ∴ ظا² θ = $\frac{1}{3}$

∴ ظا θ = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ومنها θ = $\frac{\pi}{6}$

، ∵ إشارة مَ تتغير

حول θ = $\frac{\pi}{6}$

من الموجب إلى السالب

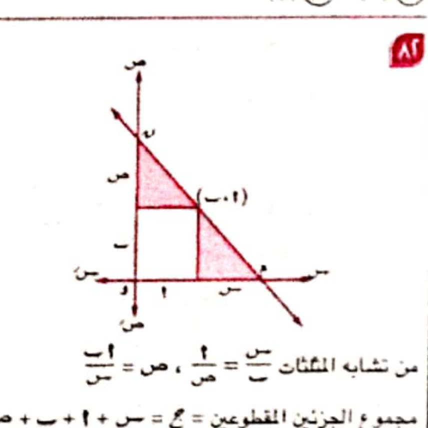
∴ توجد قيمة عظمى للمساحة عند θ = $\frac{\pi}{6}$

، المساحة = ١٢٨ جتا³ $\frac{\pi}{6}$ جا $\frac{\pi}{6}$ = ٢٤ $\sqrt{3}$ سم²

٨١

① (حـ)	② (حـ)	③ (حـ)	④ (حـ)	⑤ (ب)
⑥ (حـ)	⑦ (أ)	⑧ (حـ)	⑨ (أ)	⑩ (د)
⑪ (ب)	⑫ (ب)	⑬ (ب)	⑭ (أ)	⑮ (أ)
⑯ (ب)	⑰ (حـ)	⑱ (أ)	⑲ (أ)	⑳ (حـ)
㉑ (ب)	㉒ (ب)	㉓ (حـ)	㉔ (أ)	㉕ (حـ)
㉖ (أ)	㉗ (ب)			

٨٢



من تشابه المثلثات $\frac{\text{س}}{\text{ب}}$ = $\frac{\text{أ}}{\text{ص}}$ ، ص = $\frac{\text{أ ب}}{\text{س}}$

مجموع الجزئين المقطوعين = ع = س + أ + ب + ص

∴ ع = س + أ + ب + $\frac{\text{أ ب}}{\text{س}}$ ∴ عَ = ١ − $\frac{\text{أ ب}}{\text{س}^2}$

بوضع عَ = ٠ ∴ ١ − $\frac{\text{أ ب}}{\text{س}^2}$ = ٠

∴ س = $\sqrt{\text{أ ب}}$

∴ عً = + $\frac{2\,\text{أ ب}}{\text{س}^3}$ > ٠ صغرى

∴ أقل مجموع = س + ص + أ + ب

= $\sqrt{\text{أ ب}}$ + $\frac{\text{أ ب}}{\sqrt{\text{أ ب}}}$ + أ + ب

= أ + ٢ $\sqrt{\text{أ ب}}$ + ب

= $(\sqrt{\text{أ}} + \sqrt{\text{ب}})^2$

٨٣

نفرض أن :

م = ب هـ × هـ حـ

وبفرض أن :

ب هـ = س سم

∴ م = س (٨ − س) = ٨ س − س²

∴ مَ = ٨ − ٢ س

مً = −٢ < صفر (قيمة عظمى)

∴ مَ = ٠ عندما س = ٤ سم

∴ هـ منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$

، ∵ أ حـ = $\sqrt{(6)^2 + (8)^2}$ = ١٠ سم

نفرض أن : ك = (أ ن)² + (ن حـ)²

وبفرض أن : أ ن = ص سم

∴ ك = ص² + (١٠ − ص)²

= ٢ ص² − ٢٠ ص + ١٠٠

∴ كَ = ٤ ص − ٢٠

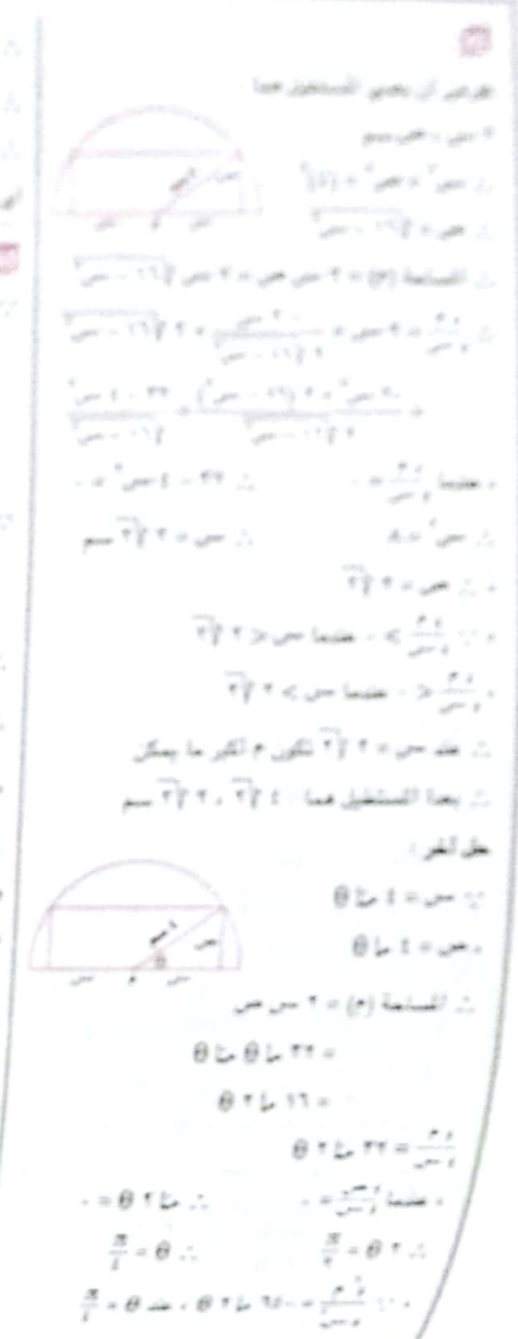
، كً = ٤ > ٠ (قيمة صغرى)

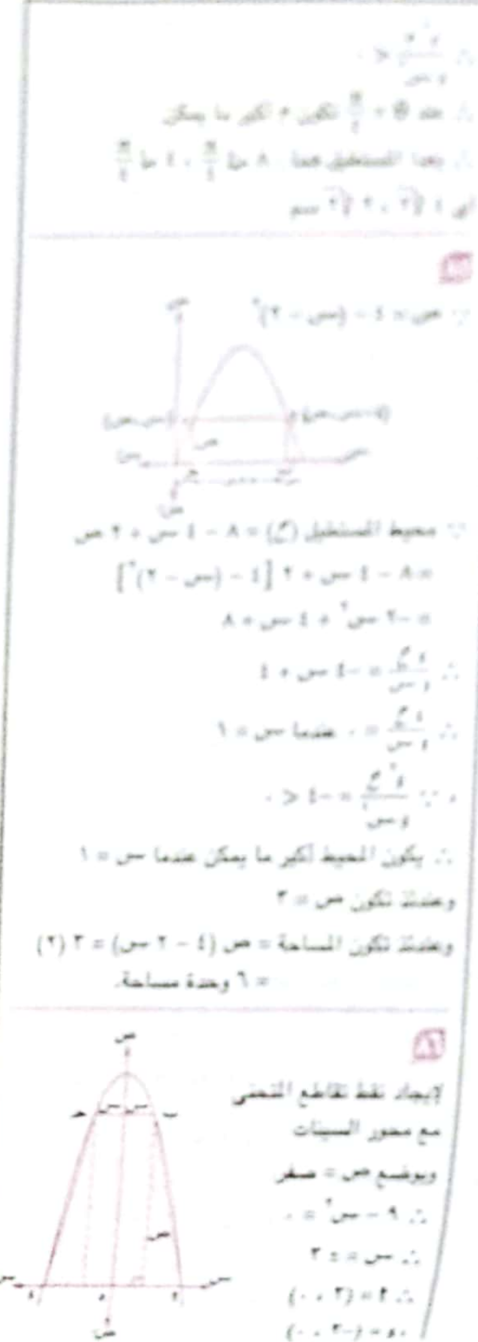
∴ كَ = ٠ عندما ص = ٥ ∴ ن منتصف $\overline{\text{أ حـ}}$

∴ الشكل أ د هـ ن متوازي أضلاع

∴ مساحة الشكل = طول القاعدة × الارتفاع

= ٣ × ٤ = ١٢ سم²





ويفرض أن

ىـ = (س ، ص)

∴ م (مساحة شبه المنحرف أ ب حـ ء)

= (٦ + ٢ س)/٢ × ص

= (٣ + س) (٩ − س^٢)

= ٢٧ + ٩ س − ٣ س^٢ − س^٣

∴ ءم/ءس = ٩ − ٦ س − ٣ س^٢ وبوضع ءم/ءس = ٠

∴ س^٢ + ٢ س − ٣ = ٠

∴ (س − ١) (س + ٣) = ٠

∴ س = ١ أ، س = −٣ (مرفوض)

، ∵ ء^٢م/ءس^٢ = −٦ − ٦ س

∴ [ء^٢م/ءس^٢] عند س = ١ = −١٢ < ٠

∴ المساحة قيمة عظمى ، م = ٣٢ وحدة مربعة.

٨٧

∵ ΔΔ أهـ و ، أ ب حـ متشابهان

∴ تتناسب أطوال أضلاعهما وارتفاعاتهما

∴ ص/١٦ = أهـ/أل = (١٢ − س)/١٢

ص = ١٦ − ٤/٣ س

مساحة المستطيل = م = س ص = ١٦ س − ٤/٣ س^٢

مَ = ١٦ − ٨/٣ س

مَ = صفر عند س = ٦

مً = −٨/٣ < ٠ عظمى

∴ بعدا المستطيل ذى أكبر مساحة هى ٦ ، ٨ سم

٨٨

نرسم أن عموديًا على ب حـ يقطعه فى ن

، نفرض أن

ب حـ = س سم

، أ ن = ص سم

، مساحة المثلث = هـ سم^٢

ومن هندسة الشكل نجد أن Δ أ و ى ~ Δ أ ب ن

∴ أ و/أ ب = (ص − ٦)/ص (١)

، Δ أ و ن ~ Δ أ ب حـ

∴ أ و/أ ب = ٨/س (٢)

من (١) ، (٢)

∴ ٨/س = (ص − ٦)/ص ∴ س = ٨ ص/(ص − ٦)

∵ هـ = ١/٢ س × ص

= ١/٢ ص × ٨ ص/(ص − ٦) = ٤ ص^٢/(ص − ٦)

∴ هـَ = (٨ ص (ص − ٦) − ٤ ص^٢)/(ص − ٦)^٢

= (٨ ص^٢ − ٤٨ ص − ٤ ص^٢)/(ص − ٦)^٢

= (٤ ص^٢ − ٤٨ ص)/(ص − ٦)^٢

∴ هـَ = ٠ عند ص = ٠ أ، ص = ١٢

، ∵ هـً = ((٨ ص − ٤٨) (ص − ٦)^٢ − ٢ (ص − ٦) (٤ ص^٢ − ٤٨ ص))/(ص − ٦)^٤

= (٨ (ص − ٦)^٢ − ٨ ص (ص − ١٢))/(ص − ٦)^٣

، عند ص = ١٢ تكون هـً > ٠ (قيمة صغرى)

وعندها تكون أقل مساحة = (٤ × ١٤٤)/(١٢ − ٦) = ٩٦ سم^٢

∵ $نق^٢ = ٢٢٥ - ع^٢$

، ∵ حجم المخروط = ح = $\frac{١}{٣}$ π $نق^٢$ ع

∴ ح = $\frac{π}{٣}$ ع (٢٢٥ − $ع^٢$)

= $\frac{π}{٣}$ (٢٢٥ ع − $ع^٣$)

ح̀ = $\frac{π}{٣}$ (٢٢٥ − ٣ $ع^٢$)

بوضع ح̀ = ٠ ∴ $ع^٢$ = $\frac{٢٢٥}{٣}$ = ٧٥

∴ ع = ٥ $\sqrt{٣}$

ح̀̀ = $\frac{π}{٣}$ (−٦ ع) كمية سالبة (قيمة عظمى)

∴ أكبر حجم $(ح)_{ع = ٥\sqrt{٣}}$

= $\frac{π}{٣}$ × ٥ $\sqrt{٣}$ (٢٢٥ − $(٥\sqrt{٣})^٢$) = ٢٥٠ $\sqrt{٣}$ π $سم^٣$

٨١

نفرض أن إحداثي ب هي (س ، ٠)

∴ حـ هي (س ، $\frac{١}{٢}$ س + ١)

، ء هي (س ، ١ + ٤ س − $س^٢$)

طول $\overline{حـ ء}$ (م) = | $ص_٢$ − $ص_١$ |

= (١ + ٤ س − $س^٢$) − ($\frac{١}{٢}$ س + ١)

م = $\frac{٧}{٢}$ س − $س^٢$

م̀ = $\frac{٧}{٢}$ − ٢ س

بوضع م̀ = ٠

∴ س = $\frac{٧}{٤}$

م̀̀ = −٢ كمية سالبة قيمة عظمى

∴ إحداثي النقطة ب هي ($\frac{٧}{٤}$ ، ٠)

لإيجاد نقطة تقاطع المستقيمين نحل المعادلتين معًا.

ص = ٤ س ، ص = ١٨ − ٢ س

∴ ٤ س = ١٨ − ٢ س ∴ ٦ س = ١٨

∴ س = ٣ ومنها ص = ١٢

∴ نقطة التقاطع : هـ = (٣ ، ١٢)

، بوضع ١٨ − ٢ س = ٠

∴ س = ٩ ∴ ك (٩ ، ٠)

ومن تشابه المثلثات نجد أن : $\frac{هـ أ}{هـ ك} = \frac{هـ ن}{هـ ل} = \frac{أ ء}{ك و}$

∴ $\frac{١٢ - ع}{١٢} = \frac{ں}{٩}$ ∴ ٤ ں = ٣٦ − ٣ ع

∴ ں = ٩ − $\frac{٣}{٤}$ ع

، ∵ م (مساحة المستطيل) = ع ں

∴ م = ع (٩ − $\frac{٣}{٤}$ ع) ∴ م = ٩ ع − $\frac{٣}{٤}$ $ع^٢$

∴ م̀ = ٩ − $\frac{٣}{٢}$ ع

وبوضع م̀ = ٠ ∴ ع = ٦ ومنها ں = ٤,٥

، ∵ م̀̀ = $\frac{-٣}{٢}$ < ٠

∴ توجد قيمة عظمى لمساحة المستطيل

، م = ٤,٥ × ٦ = ٢٧ وحدة مربعة.

٨٢

توجد نقط التقاطع للمنحنيين بحل معادلتيهما

من المعادلة الثانية ص = $\frac{١}{٤}$ $س^٢$

، في المعادلة الأولى $(\frac{١}{٤} س^٢)^٢$ = ٤ س

$س^٤$ = ٦٤ س ∴ س = ٠ أو س = ٤

يتقاطع المنحنيان في نقطتين و (٠ ، ٠) ، حـ (٤ ، ٤)

النقطة أ إحداثيها السيني س = ٢

∴ إحداثيها هو أ (٢ ، ٢ $\sqrt{٢}$)

م = $\frac{١}{٢}$ | Δ | حيث Δ = $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٢ & ٢\sqrt{٢} & ١ \\ س & \frac{١}{٤}س^٢ & ١ \end{vmatrix}$

∴ م = $\frac{١}{٢}$ | $\frac{١}{٢}$ $س^٢$ − ٢ $\sqrt{٢}$ س | ، ٠ < س < ٤

∴ م = س $\sqrt{٢}$ − $\frac{١}{٤}$ $س^٢$ حيث س ∈]٠ ، ٤[

∴ $\frac{ءم}{ءس}$ = $\sqrt{٢}$ − $\frac{١}{٢}$ س

بوضع $\frac{ءم}{ءس}$ = ٠ ∴ س = ٢ $\sqrt{٢}$

، ∵ $\frac{ء^٢م}{ءس^٢}$ = − $\frac{١}{٢}$ < ٠ (قيمة عظمى)

∴ عند س = ٢ $\sqrt{٢}$ مثلث أ و ب له أكبر مساحة

∴ أكبر مساحة م = ٢ $\sqrt{٢}$ × $\sqrt{٢}$ − $\frac{١}{٤}$ × $(٢\sqrt{٢})^٢$

= ٢ وحدة مربعة.

حل آخر :

المساحة = $\frac{١}{٢}$ | $\overrightarrow{و أ}$ × $\overrightarrow{و ب}$ |

= $\frac{١}{٢}$ | (٢ ، ٢ $\sqrt{٢}$) × (س ، $\frac{١}{٤}$ $س^٢$) |

= $\frac{١}{٢}$ | $\frac{١}{٢}$ $س^٢$ − ٢ $\sqrt{٢}$ س | حيث ٠ < س < ٤

ثم نكمل الحل ...

٨٣

(١) (ب) (٢) (أ) (٣) (ب) (٤) (ب)

إرشادات لحل رقم ٨٣

(١)

بفرض أن النقطة أ هي (س ، ص)

، ص = $\frac{١}{٢}$ (٦ − س) = ٣ − $\frac{١}{٢}$ س

مساحة المثلث (م) = $\frac{١}{٢}$ × ٢ س × ص

= س (٣ − $\frac{١}{٢}$ س)

= ٣ س − $\frac{١}{٢}$ $س^٢$

∴ $\frac{ءم}{ءس}$ = ٣ − $\frac{٢}{٢}$ س

، بوضع $\frac{ءم}{ءس}$ = ٠ ∴ س = ٣ ، $\frac{ء^٢م}{ءس^٢}$ = $\frac{-٢}{٢}$ < ٠

∴ أكبر مساحة للمثلث = ٣ × ٣ − $\frac{١}{٢}$ × $(٣)^٢$

= ٣ وحدة مربعة

(٢)

∵ $\overleftrightarrow{أ ب}$ // محور الصادات

∴ نفرض أن أ = (س ، $ص_١$) حيث $ص_١$ = ظا س

، ب = (س ، $ص_٢$) حيث $ص_٢$ = ٤ س

∴ ل (طول $\overline{أ ب}$) = $ص_٢$ − $ص_١$ = ٤ س − ظا س

∴ $\frac{ءل}{ءس}$ = ٤ − $قا^٢$ س

وبوضع $\frac{ءل}{ءس}$ = ٠

∴ $قا^٢$ س = ٤ ∴ س = $\frac{π}{٣}$

، ∵ $\frac{ء^٢ل}{ءس^٢}$ < ٠

∴ أكبر قيمة لطول $\overline{أ ب}$ تتحقق عند س = $\frac{π}{٣}$

وتساوي $\frac{٤π}{٣}$ − ظا $\frac{π}{٣}$ = $\frac{٤π - ٣\sqrt{٣}}{٣}$

(٣)

نفرض أن طول $\overline{ء هـ}$ = س

∴ حـ ء = $\frac{س}{ظا ٣٠°}$

= $\sqrt{٣}$ س

∴ و ب = ١٠ − $\sqrt{٣}$ س

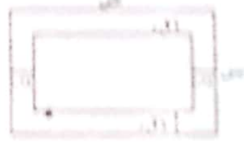
، ق (∠ أ هـ و) = ق (∠ حـ) = ٣٠°

∴ ق (∠ هـ و ب) = ٦٠°

∴ مساحة شبه المنحرف = م

يوضع م′ = صفر

∴ مساحة شبه المنحرف تكون قيمة عظمى عند



(٤)

∴ المساحة المستخدمة

١٤

مساحة الشكل

مساحة المستطيل

يوضع م′ = صفر

∴ س = ١٠ تجعل المساحة أصغر ما يمكن

∴ بعدا المستطيل

١٥

مساحة شبه المنحرف

يوضع م′ = صفر

∴ م أصغر ما يمكن

١٦

مساحة المثلث

يوضع م′ = صفر

∴ س = ل

أكبر مساحة

١٧

مساحة المستطيل الخارجي

يوضع $\frac{dم}{dهـ}$ = صفر

∴ جا ٢هـ = صفر

المساحة تكون أكبر ما يمكن

١٨

بالاشتقاق بالنسبة إلى س

∴ س = ٦ تجعل ص أقل ما يمكن

بفرض أن :

$\text{ق}(\angle \text{ا حـ ب}) = \theta$

$\therefore \theta = \text{ق}(\angle \text{ا حـ و}) - \text{ق}(\angle \text{ب حـ و})$

$\therefore \text{ظا}\,\theta = \dfrac{\text{ظا}(\angle \text{ا حـ و}) - \text{ظا}(\angle \text{ب حـ و})}{1 + \text{ظا}(\angle \text{ا حـ و}) \times \text{ظا}(\angle \text{ب حـ و})}$

$\therefore \text{ظا}\,\theta = \dfrac{\frac{9}{\text{س}} - \frac{4}{\text{س}}}{1 + \frac{9}{\text{س}} \times \frac{4}{\text{س}}}$

$\therefore \text{ظا}\,\theta = \dfrac{9\text{س} - 4\text{س}}{\text{س}^2 + 36} = \dfrac{5\text{س}}{\text{س}^2 + 36}$

$\therefore \text{قا}^2\,\theta \times \dfrac{d\theta}{d\text{س}} = \dfrac{5(\text{س}^2 + 36) - 2\text{س} \times 5\text{س}}{(\text{س}^2 + 36)^2}$

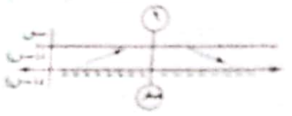
$\therefore \text{قا}^2\,\theta \times \dfrac{d\theta}{d\text{س}} = \dfrac{-5\text{س}^2 + 180}{(\text{س}^2 + 36)^2}$

بوضع $\dfrac{d\theta}{d\text{س}} = 0$ $\therefore -5\text{س}^2 + 180 = 0$

$\therefore \text{س} = \pm 6$

$\because \text{حـ} \in \overrightarrow{\text{و س}}$

$\therefore \text{س} = 6$ $\therefore \text{حـ}(6 ، 0)$



$\therefore \theta$ أكبر ما يمكن عندما $\text{س} = 6$

$\therefore$ إحداثي حـ لتكون θ أكبر ما يمكن هي $(6 ، 0)$

$\because$ المثلث ا ب حـ متساوي الساقين

$\therefore \overline{\text{ا ء}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$ وينصفه

$\therefore \text{م} \in \overline{\text{ا ء}}$

، بفرض م ء = س سم

$\therefore \text{ا ء} = (15 + \text{س})$ سم

$\therefore \text{ب ء} = \sqrt{225 - \text{س}^2}$ سم

$\therefore$ مساحة Δ ا ب حـ (م)

$= \frac{1}{2}\ \text{ب حـ} \times \text{ا ء} = \text{ب ء} \times \text{ا ء}$

$= \sqrt{225 - \text{س}^2} \times (15 + \text{س})$

$\therefore \dfrac{d\text{م}}{d\text{س}} = \sqrt{225 - \text{س}^2} - (15 + \text{س}) \times \dfrac{2\text{س}}{2\sqrt{225 - \text{س}^2}}$

$= \dfrac{225 - \text{س}^2 - \text{س}^2 - 15\text{س}}{\sqrt{225 - \text{س}^2}}$

، وبوضع $\dfrac{d\text{م}}{d\text{س}} = 0$

$\therefore 2\text{س}^2 + 15\text{س} - 225 = 0$

$\therefore (2\text{س} - 15)(\text{س} + 15) = 0$

$\therefore \text{س} = \frac{15}{2}$ أ، $\text{س} = -15$ (مرفوض)

$\therefore$ إشارة مَ تتغير على جانبي $\text{س} = \frac{15}{2}$

من الموجب

إلى السالب

$\therefore$ مساحة المثلث تكون أكبر ما يمكن

$\therefore$ مساحة المثلث $= \sqrt{225 - \left(\frac{15}{2}\right)^2} \times \left(15 + \frac{15}{2}\right)$

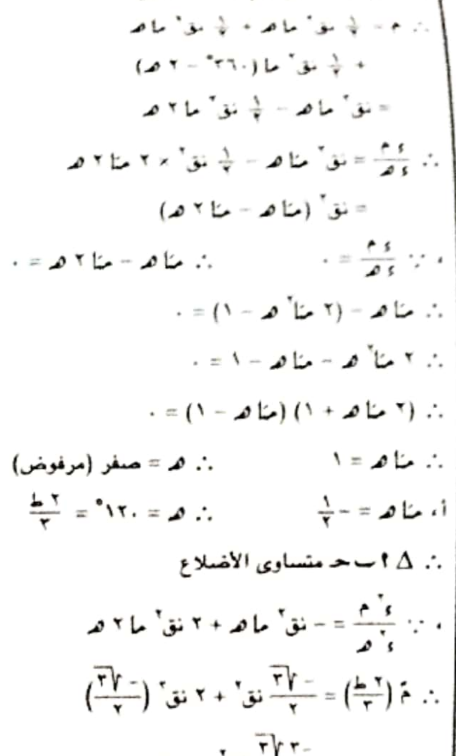
$= \frac{675}{4}\sqrt{3}$ سم^2 $= 292.28$ سم^2

حل آخر :

$\because \Delta\ \text{ا م ب} \equiv \Delta\ \text{ا م حـ}$

$\therefore \text{ق}(\angle \text{ا م ب})$

$= \text{ق}(\angle \text{ا م حـ}) = \text{هـ}$



$\therefore \text{ق}(\angle \text{ب م حـ}) = (360° - 2\,\text{هـ})$

$\therefore \text{م} = \frac{1}{2}\text{نق}^2 \text{جا هـ} + \frac{1}{2}\text{نق}^2 \text{جا هـ}$

$+ \frac{1}{2}\text{نق}^2 \text{جا}(360° - 2\,\text{هـ})$

$= \text{نق}^2 \text{جا هـ} - \frac{1}{2}\text{نق}^2 \text{جا } 2\,\text{هـ}$

$\therefore \dfrac{d\text{م}}{d\text{هـ}} = \text{نق}^2 \text{جتا هـ} - \frac{1}{2}\text{نق}^2 \times 2\ \text{جتا } 2\,\text{هـ}$

$= \text{نق}^2 (\text{جتا هـ} - \text{جتا } 2\,\text{هـ})$

، $\because \dfrac{d\text{م}}{d\text{هـ}} = 0$ $\therefore \text{جتا هـ} - \text{جتا } 2\,\text{هـ} = 0$

$\therefore \text{جتا هـ} - (2\,\text{جتا}^2 \text{هـ} - 1) = 0$

$\therefore 2\,\text{جتا}^2 \text{هـ} - \text{جتا هـ} - 1 = 0$

$\therefore (2\,\text{جتا هـ} + 1)(\text{جتا هـ} - 1) = 0$

$\therefore \text{جتا هـ} = 1$ $\therefore \text{هـ} = $ صفر (مرفوض)

أ، $\text{جتا هـ} = -\frac{1}{2}$ $\therefore \text{هـ} = 120° = \frac{2\text{ط}}{3}$

$\therefore \Delta$ ا ب حـ متساوي الأضلاع

، $\because \dfrac{d^2\text{م}}{d\text{هـ}^2} = -\text{نق}^2 \text{جا هـ} + 2\,\text{نق}^2 \text{جا } 2\,\text{هـ}$

$\therefore \text{مً}\left(\frac{2\text{ط}}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}\text{نق}^2 + 2\,\text{نق}^2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \frac{-3\sqrt{3}}{2}\text{نق}^2 <$ صفر

$\therefore$ مساحة المثلث أكبر ما يمكن

، مساحة المثلث $= \text{نق}^2 \text{جا } 120 - \frac{1}{2}\text{نق}^2 \text{جا } 240$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\text{نق}^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\text{نق}^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}\text{نق}^2$

وعندما نق = ١٥

$\therefore$ مساحة المثلث $= \frac{3\sqrt{3}}{4} \times (15)^2 = \frac{675\sqrt{3}}{4}$ سم^2

$\simeq 292.28$ سم^2

١٠١

من الشكل

$\text{ل} = \sqrt{\text{س}^2 + 4} + \sqrt{\text{ص}^2 + 4}$

من التشابه

$\frac{\text{س}}{2} = \frac{2}{\text{ص}}$

$\therefore \text{ص} = \frac{4}{\text{س}}$

$\therefore \text{ل} = \sqrt{\text{س}^2 + 4} + \sqrt{\left(\frac{4}{\text{س}}\right)^2 + 4}$

$= \sqrt{\text{س}^2 + 4} + \frac{2}{\text{س}}\sqrt{4 + \text{س}^2}$

$= \sqrt{\text{س}^2 + 4} \times \left(1 + \frac{2}{\text{س}}\right)$

$\text{لَ} = \frac{-2}{\text{س}^2}\sqrt{\text{س}^2 + 4} + \frac{2\text{س}}{2\sqrt{\text{س}^2 + 4}}\left(1 + \frac{2}{\text{س}}\right)$

$= \dfrac{-2(\text{س}^2 + 4) + \text{س}(\text{س}^2 + 2\text{س})}{\text{س}^2\sqrt{\text{س}^2 + 4}}$

$= \dfrac{-2\text{س}^2 - 8 + \text{س}^3 + 2\text{س}^2}{\text{س}^2\sqrt{\text{س}^2 + 4}} = \dfrac{\text{س}^3 - 8}{\text{س}^2\sqrt{\text{س}^2 + 4}}$

$\text{لَ} = 0$

$\therefore \text{س} = 2$ قيمة صغرى

أقل طول للسلم $\text{ل}_{\text{عند س} = 2} = \sqrt{4 + 4} \times \left(1 + \frac{2}{2}\right)$

$= 4\sqrt{2}$ متر.

١٠٢

$\text{ص}_1 = 12 - \text{س}^2$ صفر $< \text{س} < 2\sqrt{3}$

$\text{ص}_2 = \text{س}^2 - 12$ صفر $< \text{س} < 2\sqrt{3}$

$\therefore$ بعدا المستطيل = ٢ س أفقيًا

، رأسيًا $= \text{ص}_1 - \text{ص}_2 = (12 - \text{س}^2) - (\text{س}^2 - 12)$

$= 12 - \text{س}^2 + 12 - \text{س}^2$

$= 24 - 2\text{س}^2$

∴ مساحة المستطيل = م = ٢ س × (٤٢ − ٢ س^٢)

= ٨٤ س − ٤ س^٣

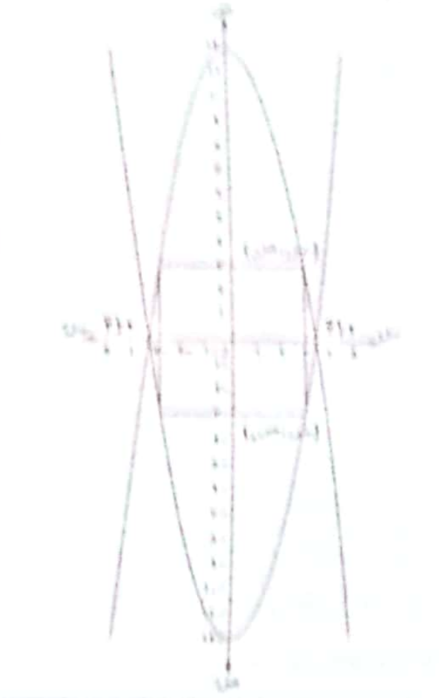
م' = ٨٤ − ١٢ س^٢

بوضع م' = ٠ ∴ س^٢ = ٧ ∴ س = $\sqrt{٧}$

م'' = −٢٤ س

م''(س = $\sqrt{٧}$) < ٠ ∴ م قيمة عظمى

∴ أكبر مساحة للمستطيل م = ...



مساحة سطح الشكل = المساحة الجانبية + مساحتي القاعدتين

∴ س = ٢ ل وحدة طول

∴ م لها قيمة صغرى عند س = ٢ ل

نفرض أن ارتفاع الأسطوانة = ٢ س

ونصف قطر الأسطوانة = ص

(٢ س)^٢ + ص^٢ = (٢٠)^٢

٤ س^٢ + ص^٢ = ٤٠٠

∴ س = $\sqrt{١٠٠ - \frac{١}{٤} ص^٢}$

م = ٢ π ص × س = ٢ π ص × $\sqrt{١٠٠ - \frac{١}{٤} ص^٢}$

م = ٠ ∴ ص = ١٠ $\sqrt{٢}$

∴ م أكبر ما يمكن عندما يكون الارتفاع ع = ١٠ $\sqrt{٢}$

حجم المكعب = $(\sqrt{٢}\,ل)^٣$ = ٢ ل^٣

نفرض أن ارتفاع المنشور ع

، طول ضلع قاعدة المنشور = س حجم المنشور

= $(\frac{\sqrt{٣}}{٤} س^٢)$ × ع

من تشابه المثلثين : ...

∴ ص = ٤ − ١ س ، ٢١ ، ١ سم

حجم الأسطوانة ح = π نق^٢ ع = π س^٢ × ص

= π س^٢ (٤ − ١ س ، ٢١)

= ...

ح' = ...

ح'' = ...

∴ س = $\frac{٤}{٣}$ سم

ح'' < ٠

∴ ح أكبر ما يمكن

∴ ص = ٤ − ١.٢ $(\frac{٤}{٣})$ + ٢٤ = ٨ سم

س^٢ + ص^٢ = ٩

ص = $\sqrt{٩ - س^٢}$

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π ص^٢ × (٣ + س)

ح = $\frac{١}{٣}$ π (٩ − س^٢) (٣ + س)

= $\frac{١}{٣}$ π (٢٧ + ٩ س − ٣ س^٢ − س^٣)

∴ ح' = $\frac{١}{٣}$ π (٩ − ٦ س − ٣ س^٢)

ح' = ٠ ⟸ (٣ + س) (٣ − ٣ س) = ٠

∴ س = −٣ (مرفوض) ، س = ١

ح = $\frac{١}{٣}$ π (...)

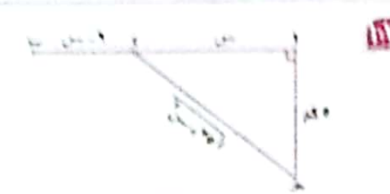
ح (س = ١) = ...

ح = $\frac{٣٢}{٣}$ π ...

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π ٣^٣

النسبة بينهما $\frac{ح_{المخروط}}{ح_{الكرة}}$ = $\frac{٨}{٢٧}$

١٦٧



ن١ (المسافة حـ ء) = $\frac{\sqrt{٢٥ + س^٢}}{٢}$ = $\frac{١}{٢}\sqrt{٢٥ + س^٢}$

ن٢ (المسافة ء ب) = $\frac{٦ - س}{٤}$ = $\frac{١}{٤}$ (٦ − س)

ن = ن١ + ن٢ = $\frac{١}{٢}\sqrt{٢٥ + س^٢}$ + $\frac{١}{٤}$ (٦ − س)

ن' = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{٢ س}{٢\sqrt{٢٥ + س^٢}}$ + $\frac{١}{٤}$ × −١

= $\frac{س}{٢\sqrt{٢٥ + س^٢}}$ − $\frac{١}{٤}$

ن' = ٠ فإن $\frac{س}{٢\sqrt{٢٥ + س^٢}}$ = $\frac{١}{٤}$

∴ ٢ س = $\sqrt{٢٥ + س^٢}$ بالتربيع

٤ س^٢ = ٢٥ + س^٢ ∴ ٣ س^٢ = ٢٥

س = $\frac{٥\sqrt{٣}}{٣}$ ≈ ٢.٩ متر

ن''(س = $\frac{٥\sqrt{٣}}{٣}$) > ٠ ، قيمة صغرى عند س = $\frac{٥\sqrt{٣}}{٣}$

∴ يجب على الرجل أن يرسو على مسافة $\frac{٥\sqrt{٣}}{٣}$ متر من نقطة أ

إجابات تمارين المتطلبات القبلية

١

① $\int ٥\,\text{ءس} = ٥\,\text{س} + \text{ث}$

② $\int (\text{س} - ٣)(٢\text{س} + ٧)\,\text{ءس}$
$= \int (٢\text{س}^٢ + \text{س} - ٢١)\,\text{ءس}$
$= \frac{٢}{٣}\text{س}^٣ + \frac{١}{٢}\text{س}^٢ - ٢١\,\text{س} + \text{ث}$

③ $\int (\text{س}^٣ + ٥\,\text{س} + \frac{١}{\text{س}^٢})\,\text{ءس}$
$= \int (\text{س}^٣ + ٥\,\text{س} + \text{س}^{-٢})\,\text{ءس}$
$= \frac{١}{٤}\text{س}^٤ + \frac{٥}{٢}\text{س}^٢ - \text{س}^{-١} + \text{ث}$

④ $\int \frac{١٢\,\text{س}^٤ + ٣}{\text{س}^٢}\,\text{ءس}$
$= \int (١٢\,\text{س}^٢ + ٣\,\text{س}^{-٢})\,\text{ءس}$
$= ٤\,\text{س}^٣ - ٣\,\text{س}^{-١} + \text{ث}$

⑤ $\int (\text{س}^{\frac{١}{٢}} + \text{س}^{-\frac{١}{٢}} + \text{س}^{-\frac{٣}{٢}})\,\text{ءس}$
$= \frac{٢}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}} + ٢\,\text{س}^{\frac{١}{٢}} - ٢\,\text{س}^{-\frac{١}{٢}} + \text{ث}$

⑥ $\int \frac{\text{س} + ١}{\sqrt[٣]{\text{س}}}\,\text{ءس} = \int (\text{س}^{\frac{٢}{٣}} + \text{س}^{-\frac{١}{٣}})\,\text{ءس}$
$= \frac{٣}{٥}\text{س}^{\frac{٥}{٣}} + \frac{٣}{٢}\text{س}^{\frac{٢}{٣}} + \text{ث}$

⑦ $\int (٢\text{س} + ٣)^٣\,\text{ءس} = \frac{(٢\text{س} + ٣)^٤}{٢ \times ٤} + \text{ث}$
$= \frac{١}{٨}(٢\text{س} + ٣)^٤ + \text{ث}$

⑧ $\int (٥ - ٣\text{س})^٤\,\text{ءس} = \frac{(٥ - ٣\text{س})^٥}{٥ \times -٣} + \text{ث}$
$= \frac{-١}{١٥}(٥ - ٣\text{س})^٥ + \text{ث}$

⑨ $\int \sqrt{٤\text{س} - ١}\,\text{ءس} = \int (٤\text{س} - ١)^{\frac{١}{٢}}\,\text{ءس}$
$= \frac{(٤\text{س} - ١)^{\frac{٣}{٢}}}{٤ \times \frac{٣}{٢}} + \text{ث}$
$= \frac{١}{٦}(٤\text{س} - ١)^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$

⑩ $\int \sqrt[٣]{٣\text{س} + ١}\,\text{ءس}$
$= \int (٣\text{س} + ١)^{\frac{١}{٣}}\,\text{ءس}$
$= \frac{(٣\text{س} + ١)^{\frac{٤}{٣}}}{٣ \times \frac{٤}{٣}} + \text{ث} = \frac{١}{٤}(٣\text{س} + ١)^{\frac{٤}{٣}} + \text{ث}$

⑪ $\int \frac{\text{ءس}}{\sqrt{٣ - ٥\text{س}}} = \int (٣ - ٥\text{س})^{-\frac{١}{٢}}\,\text{ءس}$
$= \frac{(٣ - ٥\text{س})^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢} \times -٥} + \text{ث}$
$= \frac{-٢}{٥}(٣ - ٥\text{س})^{\frac{١}{٢}} + \text{ث}$

⑫ $\int \frac{\text{ءس}}{(٣\text{س} - ٤)^٦} = \int (٣\text{س} - ٤)^{-٦}\,\text{ءس}$
$= \frac{(٣\text{س} - ٤)^{-٥}}{-٥ \times ٣} + \text{ث} = \frac{-١}{١٥}(٣\text{س} - ٤)^{-٥} + \text{ث}$

⑬ $\int (\text{هـ}^{٥\text{س} + ٤} + ٢^{\text{س}} + ٣)\,\text{ءس}$
$= \frac{١}{٥}\text{هـ}^{٥\text{س} + ٤} + \frac{٢^{\text{س}}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\,٢} + ٣\,\text{س} + \text{ث}$

⑭ $\int (\frac{٥}{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}})\,\text{ءس}$
$= ٥\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث}$

⑮ $\int ٨\,\text{س}^٦(٥ - \frac{٢}{\text{س}})^٦\,\text{ءس}$
$= ٨\int (٥\text{س} - ٢)^٦\,\text{ءس}$
$= ٨ \times \frac{(٥\text{س} - ٢)^٧}{٧ \times ٥} + \text{ث}$
$= \frac{٨}{٣٥}(٥\text{س} - ٢)^٧ + \text{ث}$

⑯ $\int (٩\text{س}^٢ - ٦\text{س} + ١)^٥\,\text{ءس}$
$= \int [(٣\text{س} - ١)^٢]^٥\,\text{ءس}$
$= \int (٣\text{س} - ١)^{١٠}\,\text{ءس}$
$= \frac{(٣\text{س} - ١)^{١١}}{٣ \times ١١} + \text{ث}$
$= \frac{١}{٣٣}(٣\text{س} - ١)^{١١} + \text{ث}$

⑰ $\int \text{س}\sqrt{\frac{٥}{\text{س}} - \frac{٣}{\text{س}^٢}}\,\text{ءس}$
$= \int \sqrt{٥\text{س} - ٣}\,\text{ءس} = \int (٥\text{س} - ٣)^{\frac{١}{٢}}\,\text{ءس}$
$= \frac{(٥\text{س} - ٣)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢} \times ٥} + \text{ث} = \frac{٢}{١٥}(٥\text{س} - ٣)^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$

⑱ $\int \text{س}\sqrt[٣]{\frac{٢}{\text{س}^٣} - \frac{١}{\text{س}^٢}}\,\text{ءس} = \int \sqrt[٣]{٢ - \text{س}}\,\text{ءس}$
$= \int (٢ - \text{س})^{\frac{١}{٣}}\,\text{ءس} = \frac{(٢ - \text{س})^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣} \times -١} + \text{ث}$
$= \frac{-٣}{٤}(٢ - \text{س})^{\frac{٤}{٣}} + \text{ث}$

٢

① $\text{ص} = ٣\text{س}^٢ - ١ \quad \therefore \text{ءص} = ٦\,\text{س}\,\text{ءس}$

② $\text{ص} = (٢\text{س} + ٥)^٤$
$\therefore \text{ءص} = ٤(٢\text{س} + ٥)^٣ \times ٢\,\text{ءس}$
$= ٨(٢\text{س} + ٥)^٣\,\text{ءس}$

③ $\text{ص} = \text{هـ}^{٢\text{س} - ٣}$
$\therefore \text{ءص} = ٢\,\text{هـ}^{٢\text{س} - ٣}\,\text{ءس}$

④ $\text{ص} = \frac{\text{س}}{\text{س} - ١}$
$\therefore \text{ءص} = \frac{(\text{س} - ١)(١) - \text{س}(١)}{(\text{س} - ١)^٢}\,\text{ءس}$
$= \frac{-١}{(\text{س} - ١)^٢}\,\text{ءس}$

⑤ $\text{ع} = \frac{٤}{٣}\pi\,\text{نق}^٢ \quad \therefore \text{ءع} = \frac{٨}{٣}\pi\,\text{نق}\,\text{ءنق}$

⑥ $\text{ص} = \sqrt{(٢\text{س} + ٣)^٥} = (٢\text{س} + ٣)^{\frac{٥}{٢}}$
$\therefore \text{ءص} = \frac{٥}{٢}(٢\text{س} + ٣)^{\frac{٣}{٢}} \times ٢\,\text{ءس}$
$= ٥(٢\text{س} + ٣)^{\frac{٣}{٢}}\,\text{ءس}$

⑦ $\text{ص} = (\text{س} + \frac{١}{\text{س}})^٣$
$\therefore \text{ءص} = ٣(\text{س} + \frac{١}{\text{س}})^٢ \times (١ - \frac{١}{\text{س}^٢})\,\text{ءس}$

⑧ $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}^٢ + ٢\text{س}}$
$\therefore \text{ءص} = \text{هـ}^{\text{س}^٢ + ٢\text{س}} \times (٢\text{س} + ٢)\,\text{ءس}$

⑨ $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{جتا}\,٢\text{س}}$
$\therefore \text{ءص} = \text{هـ}^{\text{جتا}\,٢\text{س}} \times -\text{جا}\,٢\text{س} \times ٢\,\text{ءس}$
$= -٢\,\text{جا}\,٢\text{س} \,.\, \text{هـ}^{\text{جتا}\,٢\text{س}}\,\text{ءس}$

⑩ $\text{ع} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^٢ + ١)$
$\therefore \text{ءع} = \frac{١}{\text{س}^٢ + ١} \times ٢\,\text{س}\,\text{ءس}$
$= \frac{٢\text{س}}{\text{س}^٢ + ١}\,\text{ءس}$

⑪ $\text{ع} = (\text{لو}_{\text{هـ}}\frac{١٠}{\text{س}})^٢$
$\therefore \text{ءع} = ٢(\text{لو}_{\text{هـ}}\frac{١٠}{\text{س}}) \times \frac{١}{(\frac{١٠}{\text{س}})} \times \frac{-١٠}{\text{س}^٢}\,\text{ءس}$
$= \frac{-٢}{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\frac{١٠}{\text{س}}\,\text{ءس}$

⑫ $\text{ع} = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ظا}(٣\text{س} - ١)$
$\therefore \text{ءع} = \frac{-\text{قا}^٢(٣\text{س} - ١) \times ٣}{\text{ظا}(٣\text{س} - ١)}\,\text{ءس}$
$= \frac{-٣\,\text{قا}^٢(٣\text{س} - ١)}{\text{ظا}(٣\text{س} - ١)}\,\text{ءس}$

٣

① $\text{ص} = \text{ع}\,.\,\text{ل} \quad \therefore \text{ءص} = \text{ع}\,.\,\text{ءل} + \text{ل}\,.\,\text{ءع}$

② $\text{ص} = \frac{\text{ع}}{\text{ل}} \quad \therefore \text{ءص} = \frac{\text{ل}\,.\,\text{ءع} - \text{ع}\,.\,\text{ءل}}{\text{ل}^٢}$

٤

$\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = ٢٥$
$\therefore ٢\,\text{س}\,.\,\text{ءس} + ٢\,\text{ص}\,.\,\text{ءص} = ٠$
$\therefore \text{ءص} = \frac{-٢\,\text{س}\,\text{ءس}}{٢\,\text{ص}}$
$\therefore \text{ءص} = -\frac{\text{س}}{\text{ص}}\,.\,\text{ءس}$

أولاً مسائل على التكامل

1

① $\int ٣س(س^2+٣)^4 \, ءس$

بوضع $ع = س^2 + ٣$ ∴ $ءع = ٢س \, ءس$

∴ $ءس = \frac{ءع}{٢س}$

∴ التكامل $= \int ٣س \times ع^4 \times \frac{ءع}{٢س}$

$= \int \frac{٣}{٢} ع^4 \, ءع$

$= \frac{٣}{٢} \times \frac{ع^5}{٥} + ث = \frac{٣}{١٠} ع^5 + ث$

$= \frac{٣}{١٠} (س^2+٣)^5 + ث$

② $\int س^3 (٢س^4 - ٧)^5 \, ءس$

$= \frac{١}{٨} \int ٨س^3 (٢س^4 - ٧)^5 \, ءس$

$= \frac{١}{٨} \times \frac{(٢س^4 - ٧)^6}{٦} + ث$

$= \frac{١}{٤٨} (٢س^4 - ٧)^6 + ث$

③ $\int (س^2 - ٤س + ١)^{-3} \times (س - ٢) \, ءس$

$= \frac{١}{٢} \int (٢س - ٤)(س^2 - ٤س + ١)^{-3} \, ءس$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{(س^2 - ٤س + ١)^{-2}}{-٢} + ث$

$= -\frac{١}{٤} (س^2 - ٤س + ١)^{-2} + ث$

④ $\int (١ - س^2)(٣س - س^3)^5 \, ءس$

$= \frac{١}{٣} \int (٣ - ٣س^2)(٣س - س^3)^5 \, ءس$

$= \frac{١}{٣} \times \frac{(٣س - س^3)^6}{٦} + ث$

$= \frac{١}{١٨} (٣س - س^3)^6 + ث$

⑤ $\int س\sqrt{س^2 + ١} \, ءس$

$= \frac{١}{٢} \int ٢س (س^2 + ١)^{\frac{١}{٢}} \, ءس$

$= \frac{١}{٣} (س^2 + ١)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

$= \frac{١}{٢} \int (٢س - ٢)(س^2 - ٢س)^{\frac{١}{٣}} \, ءس$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{(س^2 - ٢س)^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣}} + ث$

$= \frac{٣}{٨} (س^2 - ٢س)^{\frac{٤}{٣}} + ث$

⑦ $\int \frac{س^2}{(س^3 - ٤)^5} \, ءس$

$= \frac{١}{٣} \int ٣س^2 (س^3 - ٤)^{-5} \, ءس$

$= \frac{١}{٣} \times \frac{(س^3 - ٤)^{-4}}{-٤} + ث$

$= \frac{-١}{١٢} (س^3 - ٤)^{-4} + ث$

⑧ $\int \frac{س^4}{(س^5 + ١)^7} \, ءس$

$= \frac{١}{٥} \int ٥س^4 (س^5 + ١)^{-7} \, ءس$

$= \frac{١}{٥} \times \frac{(س^5 + ١)^{-6}}{-٦} + ث$

$= \frac{-١}{٣٠} (س^5 + ١)^{-6} + ث$

⑨ $\int \frac{س}{(س^2 + ٨)^3} \, ءس$

$= \frac{١}{٢} \int (٢س)(س^2 + ٨)^{-3} \, ءس$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{(س^2 + ٨)^{-2}}{-٢} + ث$

$= \frac{-١}{٤} (س^2 + ٨)^{-2} + ث$

⑩ $\int \frac{س^2 + ١}{(س^3 + ٣س)^6} \, ءس$

$= \frac{١}{٣} \int (٣س^2 + ٣)(س^3 + ٣س)^{-6} \, ءس$

$= \frac{١}{٣} \times \frac{(س^3 + ٣س)^{-5}}{-٥} + ث$

$= \frac{-١}{١٥} (س^3 + ٣س)^{-5} + ث$

$= ٥ \times \frac{١}{٦} \int \frac{٦س}{٣س^2 - ١} \, ءس$

$= \frac{٥}{٦} لو_{هـ} |٣س^2 - ١| + ث$

⑫ $\int \frac{س^2}{س^3 + ٥} \, ءس = \frac{١}{٣} \int \frac{٣س^2}{س^3 + ٥} \, ءس$

$= \frac{١}{٣} لو_{هـ} |س^3 + ٥| + ث$

⑬ $\int \frac{٢ص^3}{ص^4 + ٥} \, ءص = \frac{١}{٢} \int \frac{٤ص^3}{ص^4 + ٥} \, ءص$

$= \frac{١}{٢} لو_{هـ} |ص^4 + ٥| + ث$

⑭ $\int \frac{١٢س + ٢}{٣س^2 + س + ٧} \, ءس$

$= ٢ \int \frac{٦س + ١}{٣س^2 + س + ٧} \, ءس$

$= ٢ لو_{هـ} |٣س^2 + س + ٧| + ث$

⑮ $\int \frac{س}{\sqrt{١ + ٣س^2}} \, ءس = \frac{١}{٦} \int \frac{٦س}{\sqrt{١ + ٣س^2}} \, ءس$

$= \frac{١}{٦} \times ٢\sqrt{١ + ٣س^2} + ث$

$= \frac{١}{٣} \sqrt{١ + ٣س^2} + ث$

⑯ $\int \frac{س^3}{\sqrt{٢س^4 + ٣}} \, ءس = \frac{١}{٨} \int \frac{٨س^3}{\sqrt{٢س^4 + ٣}} \, ءس$

$= \frac{١}{٨} \times ٢\sqrt{٢س^4 + ٣} + ث$

$= \frac{١}{٤} \sqrt{٢س^4 + ٣} + ث$

⑰ $\int \frac{س^2 + ١}{\sqrt{س^3 + ٣س + ٥}} \, ءس$

$= \frac{١}{٣} \int \frac{٣س^2 + ٣}{\sqrt{س^3 + ٣س + ٥}} \, ءس$

$= \frac{١}{٣} \times ٢\sqrt{س^3 + ٣س + ٥} + ث$

$= \frac{٢}{٣} \sqrt{س^3 + ٣س + ٥} + ث$

$= \int (٢س - ٥)(س^2 - ٥س + ٧)^{-\frac{٣}{٢}} \, ءس$

$= \frac{(س^2 - ٥س + ٧)^{-\frac{١}{٢}}}{-\frac{١}{٢}} + ث$

$= -٢ (س^2 - ٥س + ٧)^{-\frac{١}{٢}} + ث$

⑲ $\int \frac{١}{س^2} (١ + \frac{١}{س})^3 \, ءس$

$= -\int (\frac{-١}{س^2})(١ + \frac{١}{س})^3 \, ءس$

$= \frac{-(١ + \frac{١}{س})^4}{٤} + ث$

$= \frac{-١}{٤} (١ + \frac{١}{س})^4 + ث$

⑳ $\int \frac{ءس}{\sqrt{س}(\sqrt{س} + ٢)^5}$

$= ٢ \int \frac{١}{٢\sqrt{س}} \times (\sqrt{س} + ٢)^{-5} \, ءس$

$= \frac{٢(\sqrt{س} + ٢)^{-4}}{-٤} + ث$

$= \frac{-١}{٢} (\sqrt{س} + ٢)^{-4} + ث$

㉑ $\int \frac{(\sqrt{س} + ٣)^5}{\sqrt{س}} \, ءس$

$= ٢ \int \frac{١}{٢\sqrt{س}} (\sqrt{س} + ٣)^5 \, ءس$

$= \frac{٢(\sqrt{س} + ٣)^6}{٦} + ث$

$= \frac{١}{٣} (\sqrt{س} + ٣)^6 + ث$

㉒ $\int \sqrt{\frac{١ + \sqrt{س}}{س}} \, ءس = \int \frac{(١ + \sqrt{س})^{\frac{١}{٢}}}{\sqrt{س}} \, ءس$

$= ٢ \int (\frac{١}{٢\sqrt{س}})(١ + \sqrt{س})^{\frac{١}{٢}} \, ءس$

$= ٢ \times \frac{(١ + \sqrt{س})^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + ث$

$= \frac{٤}{٣} (١ + \sqrt{س})^{\frac{٣}{٢}} + ث$

(٢٢) $\int (٢س - ٣)^٥ (٤س + ١)^٥ (٨س - ٥) \, ءس$

$= \int (٨س - ٥)(٨س^٢ - ١٠س - ٣)^٥ \, ءس$

$= \frac{١}{٢} \int (١٦س - ١٠)$

$(٨س^٢ - ١٠س - ٣)^٥ \, ءس$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{(٨س^٢ - ١٠س - ٣)^٦}{٦} + ث$

$= \frac{١}{١٢} (٨س^٢ - ١٠س - ٣)^٦ + ث$

(٢٤) $\int \sqrt[٣]{س^٣ - ٣س^٢ + ٣س - ٤} \, (س - ١)^٢ \, ءس$

$= \int (س^٢ - ٢س + ١)$

$(س^٣ - ٣س^٢ + ٣س - ٤)^{\frac{١}{٣}} \, ءس$

$= \frac{١}{٣} \int (٣س^٢ - ٦س + ٣)$

$(س^٣ - ٣س^٢ + ٣س - ٤)^{\frac{١}{٣}} \, ءس$

$= \frac{١}{٣} \times \frac{(س^٣ - ٣س^٢ + ٣س - ٤)^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣}} + ث$

$= \frac{١}{٤} (س^٣ - ٣س^٢ + ٣س - ٤)^{\frac{٤}{٣}} + ث$

٢

(١) $\int س (س - ٥)^٣ \, ءس$

بوضع $ع = س - ٥$ $\therefore س = ع + ٥$

$ءس = ءع$

$\therefore \int س (س - ٥)^٣ \, ءس$

$= \int (ع + ٥)(ع)^٣ \, ءع$

$= \int (ع^٤ + ٥ع^٣) \, ءع$

$= \frac{١}{٥} ع^٥ + \frac{٥}{٤} ع^٤ + ث$

$= \frac{١}{٥} (س - ٥)^٥ + \frac{٥}{٤} (س - ٥)^٤ + ث$

حل آخر :

$\int س (س - ٥)^٣ \, ءس$

$= \int (س - ٥ + ٥)(س - ٥)^٣ \, ءس$

$= \int [(س - ٥)^٤ + ٥(س - ٥)^٣] \, ءس$

$= \frac{١}{٥} (س - ٥)^٥ + \frac{٥}{٤} (س - ٥)^٤ + ث$

(٢) $\int س (٢س + ٣)^٤ \, ءس$

، بوضع $ع = ٢س + ٣$ $\therefore س = \frac{١}{٢} (ع - ٣)$

$\therefore ءع = ٢ \, ءس$ $\therefore ءس = \frac{١}{٢} ءع$

$\therefore \int س (٢س + ٣)^٤ \, ءس$

$= \int \frac{١}{٢} (ع - ٣)(ع)^٤ \times \frac{١}{٢} ءع$

$= \int (\frac{١}{٤} ع^٥ - \frac{٣}{٤} ع^٤) \, ءع$

$= \frac{١}{٢٤} ع^٦ - \frac{٣}{٢٠} ع^٥ + ث$

$= \frac{١}{٢٤} (٢س + ٣)^٦ - \frac{٣}{٢٠} (٢س + ٣)^٥ + ث$

(٣) $\int س \sqrt{س + ٤} \, ءس$ بوضع $ع = س + ٤$

$\therefore س = ع - ٤$ $\therefore ءس = ءع$

$\therefore \int س \sqrt{س + ٤} \, ءس$

$= \int (ع - ٤) \sqrt{ع} \, ءع$

$= \int (ع^{\frac{٣}{٢}} - ٤ ع^{\frac{١}{٢}}) \, ءع$

$= \frac{٢}{٥} ع^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٨}{٣} ع^{\frac{٣}{٢}} + ث$

$= \frac{٢}{٥} (س + ٤)^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٨}{٣} (س + ٤)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

(٤) $\int س \sqrt{٢س + ٥} \, ءس$ بوضع $ع = ٢س + ٥$

$\therefore س = \frac{١}{٢} (ع - ٥)$ $\therefore ءس = \frac{١}{٢} ءع$

$\therefore \int س \sqrt{٢س + ٥} \, ءس$

$= \int \frac{١}{٢} (ع - ٥) \sqrt{ع} \times \frac{١}{٢} ءع$

$= \int (\frac{١}{٤} ع^{\frac{٣}{٢}} - \frac{٥}{٤} ع^{\frac{١}{٢}}) \, ءع$

$= \frac{١}{٤} \times \frac{٢}{٥} ع^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٥}{٤} \times \frac{٢}{٣} ع^{\frac{٣}{٢}} + ث$

$= \frac{١}{١٠} ع^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٥}{٦} ع^{\frac{٣}{٢}} + ث$

$= \frac{١}{١٠} (٢س + ٥)^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٥}{٦} (٢س + ٥)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

(٥) $\int س^٢ \sqrt{س + ٢} \, ءس$ ، بوضع $ع = \sqrt{س + ٢}$

$\therefore س = ع^٢ - ٢$ $\therefore ءس = ٢ ع \, ءع$

$\therefore \int س^٢ \sqrt{س + ٢} \, ءس$

$= \int (ع^٢ - ٢)^٢ . ع \times ٢ ع \, ءع$

$= \int (ع^٢ - ٢)^٢ \times ٢ ع^٢ \, ءع$

$= \int ٢ ع^٢ (ع^٤ - ٤ ع^٢ + ٤) \, ءع$

$= \int (٢ ع^٦ - ٨ ع^٤ + ٨ ع^٢) \, ءع$

$= \frac{٢}{٧} ع^٧ - \frac{٨}{٥} ع^٥ + \frac{٨}{٣} ع^٣ + ث$

$= \frac{٢}{٧} (س + ٢)^{\frac{٧}{٢}} - \frac{٨}{٥} (س + ٢)^{\frac{٥}{٢}}$

$+ \frac{٨}{٣} (س + ٢)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

(٦) $\int (س^٢ - ١) \sqrt{س + ١} \, ءس$

بوضع $ع = \sqrt{س + ١}$ $\therefore س = ع^٢ - ١$

$\therefore ءس = ٢ ع . ءع$

$\therefore \int (س^٢ - ١) \sqrt{س + ١} \, ءس$

$= \int ((ع^٢ - ١)^٢ - ١) . ع . ٢ ع . ءع$

$= \int (ع^٤ - ٢ ع^٢) \times ٢ ع^٢ \, ءع$

$= \int (٢ ع^٦ - ٤ ع^٤) \, ءع$

$= \frac{٢}{٧} ع^٧ - \frac{٤}{٥} ع^٥ + ث$

$= \frac{٢}{٧} (س + ١)^{\frac{٧}{٢}} - \frac{٤}{٥} (س + ١)^{\frac{٥}{٢}} + ث$

(٧) $\int س^٢ \sqrt[٣]{س - ٣} \, ءس$ بوضع $ع = \sqrt[٣]{س - ٣}$

$\therefore س = ع^٣ + ٣$ $\therefore ءس = ٣ ع^٢ . ءع$

$\therefore \int س^٢ \sqrt[٣]{س - ٣} \, ءس$

$= \int (ع^٣ + ٣)^٢ \times ع . ٣ ع^٢ \, ءع$

$= \int ٣ ع^٣ (ع^٦ + ٦ ع^٣ + ٩) \, ءع$

$= \int (٣ ع^٩ + ١٨ ع^٦ + ٢٧ ع^٣) \, ءع$

$= \frac{٣}{١٠} ع^{١٠} + \frac{١٨}{٧} ع^٧ + \frac{٢٧}{٤} ع^٤ + ث$

$= \frac{٣}{١٠} (س - ٣)^{\frac{١٠}{٣}} + \frac{١٨}{٧} (س - ٣)^{\frac{٧}{٣}}$

$+ \frac{٢٧}{٤} (س - ٣)^{\frac{٤}{٣}} + ث$

(٨) $\int س^٣ \sqrt{١ - س^٢} \, ءس$

بوضع $ع = ١ - س^٢$ $\therefore س^٢ = ١ - ع$

$\therefore س = \sqrt{١ - ع}$

$\therefore ءس = - \frac{١}{٢} (١ - ع)^{-\frac{١}{٢}} \, ءع$

$\therefore \int س^٣ \sqrt{١ - س^٢} \, ءس$

$= \int (١ - ع)^{\frac{٣}{٢}} \times \sqrt{ع} \times - \frac{١}{٢} (١ - ع)^{-\frac{١}{٢}} \, ءع$

$= - \frac{١}{٢} \int (١ - ع) \times ع^{\frac{١}{٢}} \, ءع$

$= - \frac{١}{٢} \int (ع^{\frac{١}{٢}} - ع^{\frac{٣}{٢}}) \, ءع$

$= - \frac{١}{٢} (\frac{٢}{٣} ع^{\frac{٣}{٢}} - \frac{٢}{٥} ع^{\frac{٥}{٢}}) + ث$

$= - \frac{١}{٣} ع^{\frac{٣}{٢}} + \frac{١}{٥} ع^{\frac{٥}{٢}} + ث$

$= - \frac{١}{٣} (١ - س^٢)^{\frac{٣}{٢}} + \frac{١}{٥} (١ - س^٢)^{\frac{٥}{٢}} + ث$

(٩) $\int س^٣ \sqrt[٥]{(س^٢ - ١)^٢} \, ءس$

بوضع $ع = س^٢ - ١$ $\therefore س^٢ = ع + ١$

$\therefore ٢ س \, ءس = ءع$

$\therefore \int س^٢ \sqrt[٥]{(س^٢ - ١)^٢} . س \, ءس$

$= \int (ع + ١) ع^{\frac{٢}{٥}} \times \frac{١}{٢} ءع$

$= \frac{١}{٢} \int (ع^{\frac{٧}{٥}} + ع^{\frac{٢}{٥}}) \, ءع$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{٥}{١٢} ع^{\frac{١٢}{٥}} + \frac{١}{٢} \times \frac{٥}{٧} ع^{\frac{٧}{٥}} + ث$

$= \frac{٥}{٢٤} ع^{\frac{١٢}{٥}} + \frac{٥}{١٤} ع^{\frac{٧}{٥}} + ث$

$= \frac{٥}{٢٤} (س^٢ - ١)^{\frac{١٢}{٥}} + \frac{٥}{١٤} (س^٢ - ١)^{\frac{٧}{٥}} + ث$

(١٠) $\int س^٥ (س^٢ + ٢)^٤ \, ءس$

بوضع $ع = س^٢ + ٢$ $\therefore س^٢ = ع - ٢$

$\therefore ءع = ٢ س . ءس$

$\therefore \int س^٥ (س^٢ + ٢)^٤ \, ءس$

$= \frac{١}{٢} \int (س^٢)^٢ (س^٢ + ٢)^٤ \times ٢ س . ءس$

$= \frac{١}{٢} \int (ع - ٢)^٢ . ع^٤ \times ءع$

$= \frac{١}{٢} \int (ع^٦ - ٤ ع^٥ + ٤ ع^٤) \, ءع$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٧} ع^٧ - \frac{١}{٢} \times ٤ \times \frac{١}{٦} ع^٦$

$+ \frac{١}{٢} \times ٤ \times \frac{١}{٥} ع^٥ + ث$

$= \frac{١}{١٤} ع^٧ - \frac{١}{٣} ع^٦ + \frac{٢}{٥} ع^٥ + ث$

$= \frac{١}{١٤} (س^٢ + ٢)^٧ - \frac{١}{٣} (س^٢ + ٢)^٦$

$+ \frac{٢}{٥} (س^٢ + ٢)^٥ + ث$

$(١٢)\ \int \frac{لو_هـ س}{س^٢} ء س$

$= -\frac{١}{س} لو_هـ س + \int \frac{١}{س^٢} ء س$

$= -\frac{لو_هـ س}{س} - \frac{١}{س} + ث$

$(١٣)\ \int س^٢ لو_هـ س^٣ ء س$

$= ٣ \int س^٢ لو_هـ س ء س$

$= \frac{٣}{٣} س^٣ لو_هـ س - \frac{٣}{٣} \int س^٢ ء س$

$= \frac{٣}{٣} س^٣ لو_هـ س - \frac{١}{٣} \times \frac{٣}{٣} س^٣ + ث$

$= \frac{٣}{٣} س^٣ لو_هـ س - \frac{١}{٣} س^٣ + ث$

٥

① $\int ٣ س هـ^{٣س^٢ + ١} ء س$

$= \frac{١}{٢} \int ٦ س هـ^{٣س^٢ + ١} ء س$

$= \frac{١}{٢} هـ^{٣س^٢ + ١} + ث$

② $\int س^٢ هـ^{س^٣} ء س$

$= \frac{١}{٣} \int ٣ س^٢ هـ^{س^٣} ء س$

$= \frac{١}{٣} هـ^{س^٣} + ث$

③ $\int \frac{هـ^{٣س}}{هـ^{٣س} + ٣} ء س$

$= \frac{١}{٣} \int (٣ هـ^{٣س}) \times \frac{١}{هـ^{٣س} + ٣} ء س$

$= \frac{١}{٣} لو_هـ |هـ^{٣س} + ٣| + ث$

$= \frac{١}{٣} لو_هـ (هـ^{٣س} + ٣) + ث$

④ $\int \frac{٤ هـ^{٢س}}{١ - هـ^{٢س}} ء س$

$= -٢ \int -٢ هـ^{٢س} \times \frac{١}{١ - هـ^{٢س}} ء س$

$= -٢ لو_هـ |١ - هـ^{٢س}| + ث$

⑤ $\int (٣ - س) هـ^{٦س - س^٢} ء س$

$= \frac{١}{٢} \int (٦ - ٢ س) هـ^{٦س - س^٢} ء س$

$= \frac{١}{٢} هـ^{٦س - س^٢} + ث$

⑥ $\int \frac{هـ^{\sqrt{س + ١}}}{\sqrt{س + ١}} ء س$

$= ٢ \int \frac{١}{٢\sqrt{س + ١}} هـ^{\sqrt{س + ١}} ء س$

$= ٢ هـ^{\sqrt{س + ١}} + ث$

⑦ $\int \frac{هـ^{-س} - ١}{هـ^{-س} + س} ء س$

$= - \int (-هـ^{-س} + ١) \times \frac{١}{هـ^{-س} + س} ء س$

$= - لو_هـ |هـ^{-س} + س| + ث$

⑧ $\int \frac{هـ^{٢س} + س}{هـ^{٢س} + س^٢} ء س$

$= \frac{١}{٢} \int (٢ هـ^{٢س} + ٢ س) \left(\frac{١}{هـ^{٢س} + س^٢}\right) ء س$

$= \frac{١}{٢} لو_هـ |هـ^{٢س} + س^٢| + ث$

⑨ $\int \frac{س^٢ + ١}{س^٣ - س} ء س$

(بأخذ $س^٢$ عامل مشترك من البسط والمقام)

$= \int \frac{س^٢ \left(١ + \frac{١}{س^٢}\right)}{س^٢ \left(س - \frac{١}{س}\right)} ء س$

$= \int \frac{١ + \frac{١}{س^٢}}{س - \frac{١}{س}} ء س$

(لاحظ أن البسط هو تفاضل للمقام)

$= لو_هـ |س - \frac{١}{س}| + ث$

٦

① $\therefore \int س^٢ هـ^{س} ء س$

تفاضل	تكامل
$س^٢$	$هـ^{س}$
$٢ س$	$هـ^{س}$
٢	$هـ^{س}$
صفر	$هـ^{س}$

$= س^٢ هـ^{س} - ٢ س هـ^{س}$

$+ ٢ هـ^{س} + ث$

② $\therefore \int ٩ س^٢ هـ^{٣س} ء س$

تفاضل	تكامل
$٩ س^٢$	$هـ^{٣س}$
$١٨ س$	$\frac{١}{٣} هـ^{٣س}$
١٨	$\frac{١}{٩} هـ^{٣س}$
صفر	$\frac{١}{٢٧} هـ^{٣س}$

$= ٣ س^٢ هـ^{٣س}$

$- ٢ س هـ^{٣س}$

$+ \frac{٢}{٣} هـ^{٣س} + ث$

③ $\therefore \int س^٢ هـ^{-٣س} ء س$

تفاضل	تكامل
$س^٢$	$هـ^{-٣س}$
$٢ س$	$-\frac{١}{٣} هـ^{-٣س}$
٢	$\frac{١}{٩} هـ^{-٣س}$
صفر	$-\frac{١}{٢٧} هـ^{-٣س}$

$= -\frac{١}{٣} س^٢ هـ^{-٣س}$

$- \frac{٢}{٩} س هـ^{-٣س}$

$- \frac{٢}{٢٧} هـ^{-٣س} + ث$

④ $\int س^٣ هـ^{س^٢} ء س$

$= \int س^٢ \cdot س هـ^{س^٢} ء س$

$= \frac{١}{٢} س^٢ هـ^{س^٢}$

$- \frac{١}{٢} \int ٢ س هـ^{س^٢} ء س$

$= \frac{١}{٢} س^٢ هـ^{س^٢} - \frac{١}{٢} هـ^{س^٢} + ث$

⑤ $\therefore \int س^٢ هـ^{س + ٢} ء س$

تفاضل	تكامل
$س^٢$	$هـ^{س+٢}$
$٢ س$	$هـ^{س+٢}$
٢	$هـ^{س+٢}$
صفر	$هـ^{س+٢}$

$= س^٢ هـ^{س + ٢}$

$- ٢ س هـ^{س + ٢}$

$+ ٢ هـ^{س + ٢} + ث$

⑥ $\therefore \int (س + ١)^٢ هـ^{٢س} ء س$

تفاضل	تكامل
$(س+١)^٢$	$هـ^{٢س}$
$٢(س+١)$	$\frac{١}{٢} هـ^{٢س}$
٢	$\frac{١}{٤} هـ^{٢س}$
صفر	$\frac{١}{٨} هـ^{٢س}$

$= \frac{١}{٢} (س + ١)^٢ هـ^{٢س}$

$- \frac{١}{٢} (س + ١) هـ^{٢س}$

$+ \frac{١}{٤} هـ^{٢س} + ث$

⑦ $\therefore \int (س هـ^{س})^٢ ء س$

تفاضل	تكامل
$س^٢$	$هـ^{٢س}$
$٢ س$	$\frac{١}{٢} هـ^{٢س}$
٢	$\frac{١}{٤} هـ^{٢س}$
صفر	$\frac{١}{٨} هـ^{٢س}$

$= \int س^٢ هـ^{٢س} ء س$

$= \frac{١}{٢} س^٢ هـ^{٢س}$

$- \frac{١}{٢} س هـ^{٢س}$

$+ \frac{١}{٤} هـ^{٢س} + ث$

⑧ $\therefore \int \frac{س هـ^{٢س}}{(٢ س + ١)^٢} ء س = \frac{-س}{٢} (٢ س + ١)^{-١} هـ^{٢س}$

$- \frac{١}{٢} \int - هـ^{٢س} (٢ س + ١) \times (٢ س + ١)^{-١} ء س$

$= - \frac{س}{٢} (٢ س + ١)^{-١} هـ^{٢س} + \frac{١}{٢} \int هـ^{٢س} ء س$

$= - \frac{س}{٢} (٢ س + ١)^{-١} هـ^{٢س} + \frac{١}{٤} هـ^{٢س} + ث$

⑨ $\therefore \int \frac{س هـ^{س}}{(س + ١)^٢} ء س$

$= - س (س + ١)^{-١} هـ^{س} + \int هـ^{س} ء س$

$= - س (س + ١)^{-١} هـ^{س} + هـ^{س} + ث$

⑩ $\int \frac{س^٣ هـ^{س^٢}}{(س^٢ + ١)^٢} ء س$

بوضع $س^٢ = ع$

$\therefore ٢ س ء س = ء ع$

$\therefore \int \frac{س^٢ هـ^{س^٢}}{(س^٢ + ١)^٢} ء س$

$= \frac{١}{٢} \int \frac{س^٢ هـ^{س^٢}}{(س^٢ + ١)^٢} \times ٢ س ء س$

[illegible]

⑪ $\int \frac{هـ^{\frac{1}{س}}}{س^2}\,ءس = -\int \frac{-1}{س^2}\,هـ^{\frac{1}{س}}\,ءس$

$= -هـ^{\frac{1}{س}} + ث$

⑫ $\int (لو_{هـ}\,س)^2\,ءس$

$= س\,(لو_{هـ}\,س)^2$

$- \int ٢\,لو_{هـ}\,س\,ءس$

$= س\,(لو_{هـ}\,س)^2$

$- [٢س\,لو_{هـ}\,س - \int ٢\,ءس]$

$= س\,(لو_{هـ}\,س)^2 - ٢س\,لو_{هـ}\,س$

$+ ٢س + ث$

⑬ $\int س\,(لو_{هـ}\,س)^2\,ءس$

$= \frac{1}{2}\,س^2\,(لو_{هـ}\,س)^2$

$- \int س\,لو_{هـ}\,س\,ءس$

$= \frac{1}{2}\,س^2\,(لو_{هـ}\,س)^2$

$- [\frac{1}{2}\,س^2\,لو_{هـ}\,س$

$- \int \frac{1}{2}\,س\,ءس]$

$= \frac{1}{2}\,س^2\,(لو_{هـ}\,س)^2$

$- \frac{1}{2}\,س^2\,لو_{هـ}\,س + \frac{1}{4}\,س^2 + ث$

٧

① $\int س\sqrt{٤ - س}\,ءس$ بوضع ع = ٤ − س

$\therefore س = ٤ - ع$

$\therefore ءس = -ءع$

$\therefore \int س\sqrt{٤ - س}\,ءس$

$= \int (٤ - ع) \times \sqrt{ع} \times -ءع$

$= \int (-٤ع^{\frac{1}{2}} + ع^{\frac{3}{2}})\,ءع$

$= -\frac{8}{3}ع^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}ع^{\frac{5}{2}} + ث = -\frac{8}{3}(٤ - س)^{\frac{3}{2}}$

$+ \frac{2}{5}(٤ - س)^{\frac{5}{2}} + ث$

حل آخر : $\int س\sqrt{٤ - س}\,ءس$

$= -\int -س\,(٤ - س)^{\frac{1}{2}}\,ءس$

$= -\int (٤ - س - ٤)(٤ - س)^{\frac{1}{2}}\,ءس$

$= -\int (٤ - س)^{\frac{3}{2}} - ٤\,(٤ - س)^{\frac{1}{2}}\,ءس$

$= -\left(\frac{-2}{5}(٤ - س)^{\frac{5}{2}} + \frac{8}{3}(٤ - س)^{\frac{3}{2}}\right) + ث$

$= \frac{2}{5}(٤ - س)^{\frac{5}{2}} - \frac{8}{3}(٤ - س)^{\frac{3}{2}} + ث$

② $\int \frac{س}{\sqrt{٤ + ٥س}}\,ءس$

بوضع ٤ + ٥س = ع

$\therefore س = \frac{1}{5}ع - \frac{4}{5}$

$\therefore ءس = \frac{1}{5}\,ءع$

$\therefore \int \frac{س}{\sqrt{٤ + ٥س}}\,ءس = \int \frac{ع - ٤}{٥\sqrt{ع}} \times \frac{1}{5}\,ءع$

$= \int (\frac{1}{25}ع^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{25}ع^{-\frac{1}{2}})\,ءع$

$= \frac{2}{75}ع^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{25}ع^{\frac{1}{2}} + ث$

$= \frac{2}{75}(٤ + ٥س)^{\frac{3}{2}}$

$- \frac{8}{25}(٤ + ٥س)^{\frac{1}{2}} + ث$

حل آخر :

$\int \frac{س}{\sqrt{٤ + ٥س}}\,ءس = \frac{1}{5}\int ٥س\,(٤ + ٥س)^{-\frac{1}{2}}\,ءس$

$= \frac{1}{5}\int (٥س + ٤ - ٤)$

$(٥س + ٤)^{-\frac{1}{2}}\,ءس$

$= \frac{1}{5}\int [(٥س + ٤)^{\frac{1}{2}}$

$- ٤\,(٥س + ٤)^{-\frac{1}{2}}]\,ءس$

$= \frac{1}{5}\left[\frac{(٥س + ٤)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} \times ٥}\right.$

$\left. - \frac{٤\,(٥س + ٤)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} \times ٥}\right] + ث$

$= \frac{2}{75}(٥س + ٤)^{\frac{3}{2}}$

$- \frac{8}{25}(٥س + ٤)^{\frac{1}{2}} + ث$

③ $\int \frac{٤س}{\sqrt{٢س + ١}}\,ءس$

بوضع ٢س + ١ = ع $\quad \therefore س = \frac{1}{2}ع - \frac{1}{2}$

$\therefore ءس = \frac{1}{2}\,ءع$

$\therefore \int \frac{٤س}{\sqrt{٢س + ١}}\,ءس = \int \frac{٢ع - ٢}{\sqrt{ع}} \times \frac{1}{2}\,ءع$

$= \int (ع - ١) \times ع^{\frac{1}{2}}\,ءع$

$= \int (ع^{\frac{3}{2}} - ع^{\frac{1}{2}})\,ءع$

$= \frac{2}{5}ع^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}ع^{\frac{3}{2}} + ث$

$= \frac{2}{5}(٢س + ١)^{\frac{5}{2}}$

$- \frac{2}{3}(٢س + ١)^{\frac{3}{2}} + ث$

حل آخر :

$\int \frac{٤س}{\sqrt{٢س + ١}}\,ءس$

$= ٢\int ٢س\,(٢س + ١)^{-\frac{1}{2}}\,ءس$

$= ٢\int (٢س + ١ - ١)\,(٢س + ١)^{-\frac{1}{2}}\,ءس$

$= ٢\int ((٢س + ١)^{\frac{1}{2}} - (٢س + ١)^{-\frac{1}{2}})\,ءس$

$= \frac{2}{5}(٢س + ١)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(٢س + ١)^{\frac{3}{2}} + ث$

ثانيًا مسائل على تطبيقات التكامل

١

① (د) ② (ب) ③ (ب) ④ (جـ) ⑤ (د)

⑥ (أ) ⑦ (جـ) ⑧ (د) ⑨ (أ) ⑩ (د)

⑪ (ب) ⑫ (ب)

٢

ميل العمودى = ٢ − س

$\therefore$ ميل المماس $= \frac{ءص}{ءس} = \frac{-1}{٢ - س} = \frac{1}{س - ٢}$

بالتكامل $\therefore ص = \int \frac{1}{س - ٢}\,ءس = لو_{هـ}|س - ٢| + ث$

، $\because$ أ $\in$ المنحنى $\quad \therefore ٣ = لو_{هـ}|٢ - ٣| + ث$

$\therefore ث = ٣$

$\therefore$ معادلة المنحنى : $ص = لو_{هـ}|س - ٢| + ٣$

٣

ميل المماس $= \frac{ءص}{ءس} = س\sqrt{س + ١}$

$\therefore ص = \int س\sqrt{س + ١}\,ءس$

$= \int (س + ١ - ١)\,(س + ١)^{\frac{1}{2}}\,ءس$

$= \int ((س + ١)^{\frac{3}{2}} - (س + ١)^{\frac{1}{2}})\,ءس$

$= \frac{2}{5}(س + ١)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(س + ١)^{\frac{3}{2}} + ث$

$\therefore (\cdot \,،\, \frac{11}{15})$ على المنحنى

$\therefore \frac{11}{15} = \frac{2}{5}(\cdot + ١)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(\cdot + ١)^{\frac{3}{2}} + ث$

$\therefore ث = ١$

$\therefore$ معادلة المنحنى :

$ص = \frac{2}{5}(س + ١)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(س + ١)^{\frac{3}{2}} + ١$

$\int س^٣ (س^٢ - ١)^٥ \, ءس$

بوضع $ع = س^٢ - ١$ ∴ $س^٢ = ع + ١$

∴ $٢ س \, ءس = ءع$

∴ $\int س^٣ (س^٢ - ١)^٥ \, ءس$

$= \frac{١}{٢} \int س^٢ (س^٢ - ١)^٥ \times ٢ س \, ءس$

$= \frac{١}{٢} \int (ع + ١)(ع)^٥ \, ءع$

$= \int \left(\frac{١}{٢} ع^٦ + \frac{١}{٢} ع^٥\right) ءع$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٧} ع^٧ + \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٦} ع^٦ + ث$

$= \frac{١}{١٤} ع^٧ + \frac{١}{١٢} ع^٦ + ث$

$= \frac{١}{١٤} (س^٢ - ١)^٧ + \frac{١}{١٢} (س^٢ - ١)^٦ + ث$

(١٢) $\int \frac{س}{س + ١} \, ءس$ بوضع $ع = س + ١$

∴ $س = ع - ١$ $ءس = ءع$

∴ $\int \frac{س}{س + ١} \, ءس$

$= \int \frac{ع - ١}{ع} \, ءع = \int \left(١ - \frac{١}{ع}\right) ءع$

$= ع - لو_ه |ع| + ث$

$= س + ١ - لو_ه |س + ١| + ث$

حل آخر:

$\int \frac{س + ١ - ١}{س + ١} \, ءس = \int \left(١ - \frac{١}{س + ١}\right) ءس$

$= س - لو_ه |س + ١| + ث$

(١٣) $\int \frac{س^٢}{س - ١} \, ءس$ بوضع $ع = س - ١$

∴ $س = ع + ١$ ∴ $ءس = ءع$

∴ $\int \frac{س^٢}{س - ١} \, ءس = \int \frac{(ع + ١)^٢}{ع} \, ءع$

$= \int \frac{ع^٢ + ٢ ع + ١}{ع} \, ءع$

$= \int \left(ع + ٢ + \frac{١}{ع}\right) ءع$

$= \frac{ع^٢}{٢} + ٢ ع$

$+ لو_ه |ع| + ث$

$= \frac{١}{٢} (س - ١)^٢ + ٢ (س - ١)$

$+ لو_ه |س - ١| + ث$

حل آخر:

$\int \left(\frac{س^٢ - ١}{س - ١} + \frac{١}{س - ١}\right) ءس$

$= \int \left(س + ١ + \frac{١}{س - ١}\right) ءس$

$= \frac{١}{٢} س^٢ + س + لو_ه |س - ١| + ث$

(١٤) $\int \frac{س}{(س + ١)^٢} \, ءس$

بوضع $ع = س + ١$ ∴ $س = ع - ١$

∴ $ءس = ءع$

∴ $\int \frac{س}{(س + ١)^٢} \, ءس = \int \frac{ع - ١}{ع^٢} \, ءع$

$= \int \left(\frac{١}{ع} - ع^{-٢}\right) ءع = لو_ه |ع| - \frac{ع^{-١}}{-١} + ث$

$= لو_ه |س + ١| + \frac{١}{س + ١} + ث$

(١٥) $\int \frac{س}{\sqrt{٢ س + ٢}} \, ءس$ بوضع $٢ ع = ٢ س + ٢$

∴ $س = ع - ١$ ∴ $ءس = ءع$

∴ $\int \frac{س}{\sqrt{٢ س + ٢}} \, ءس = \int \frac{ع - ١}{\sqrt{٢} ع} \, ءع$

$= \int \left(\frac{١}{\sqrt{٢}} ع^{\frac{١}{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}} ع^{-\frac{١}{٢}}\right) ءع$

$= \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{ع^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{ع^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + ث$

$= \frac{\sqrt{٢}}{٣} (س + ١)^{\frac{٣}{٢}} - \sqrt{٢} (س + ١)^{\frac{١}{٢}} + ث$

(١٦) $\int \frac{س + ١}{\sqrt{س - ١}} \, ءس$ بوضع $ع = س - ١$

∴ $س = ع + ١$ ∴ $ءع = ءس$

∴ $\int \frac{س + ١}{\sqrt{س - ١}} \, ءس = \int \frac{ع + ١ + ١}{\sqrt{ع}} \, ءع$

$= \int \left((ع)^{\frac{١}{٢}} + ٢ ع^{-\frac{١}{٢}}\right) ءع$

$= \frac{ع^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + ٢ \times \frac{ع^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + ث$

$= \frac{٢}{٣} ع^{\frac{٣}{٢}} + ٤ ع^{\frac{١}{٢}} + ث$

$= \frac{٢}{٣} (س - ١)^{\frac{٣}{٢}}$

$+ ٤ (س - ١)^{\frac{١}{٢}} + ث$

(١٧) $\int \frac{٥ م \, ءم}{\sqrt{٤ - ٢ م}}$ بوضع $ن = ٤ - ٢ م$

∴ $م = ٢ - \frac{١}{٢} ن$ ∴ $ءم = -\frac{١}{٢} ءن$

∴ $\int \frac{٥ م \, ءم}{\sqrt{٤ - ٢ م}} = \int \frac{٥ (٢ - \frac{١}{٢} ن)}{\sqrt{ن}} \times \frac{-١}{٢} ءن$

$= \int \frac{-٥}{٢} \left(٢ ن^{-\frac{١}{٢}} - \frac{١}{٢} ن^{\frac{١}{٢}}\right) ءن$

$= \int \left(-٥ ن^{-\frac{١}{٢}} + \frac{٥}{٤} ن^{\frac{١}{٢}}\right) ءن$

$= -٥ \times \frac{ن^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + \frac{٥}{٤} \times \frac{ن^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + ث$

$= -١٠ ن^{\frac{١}{٢}} + \frac{٥}{٦} ن^{\frac{٣}{٢}} + ث$

$= -١٠ (٤ - ٢ م)^{\frac{١}{٢}}$

$+ \frac{٥}{٦} (٤ - ٢ م)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

(١٨) $\int \frac{س \, ءس}{\sqrt{٤ س - ١}}$ ، بوضع $ع = ٤ س - ١$

∴ $س = \frac{١}{٤} ع + \frac{١}{٤}$ ∴ $ءس = \frac{١}{٤} ءع$

∴ $\int \frac{س \, ءس}{\sqrt{٤ س - ١}}$

$= \int \frac{\frac{١}{٤} ع + \frac{١}{٤}}{\sqrt{ع}} \times \frac{١}{٤} ءع$

$= \int \left(\frac{١}{١٦} ع^{\frac{١}{٢}} + \frac{١}{١٦} ع^{-\frac{١}{٢}}\right) ءع$

$= \frac{١}{٢٤} ع^{\frac{٣}{٢}} + \frac{١}{٨} ع^{\frac{١}{٢}} + ث$

$= \frac{١}{٢٤} (٤ س - ١)^{\frac{٣}{٢}}$

$+ \frac{١}{٨} (٤ س - ١)^{\frac{١}{٢}} + ث$

(١٩) $\int \frac{س \, ءس}{\sqrt[٣]{(س + ١)^٢}}$ ، بوضع $ع = س + ١$

∴ $س = ع - ١$ ∴ $ءس = ءع$

∴ $\int \frac{س \, ءس}{\sqrt[٣]{(س + ١)^٢}} = \int \frac{ع - ١}{ع^{\frac{٢}{٣}}} \, ءع$

$= \int \left(ع^{\frac{١}{٣}} - ع^{-\frac{٢}{٣}}\right) ءع$

$= \frac{٣}{٤} ع^{\frac{٤}{٣}} - \frac{٣}{١} ع^{\frac{١}{٣}} + ث$

$= \frac{٣}{٤} (س + ١)^{\frac{٤}{٣}}$

$- \frac{٣}{١} (س + ١)^{\frac{١}{٣}} + ث$

(٢٠) $\int \frac{\sqrt{س} \, ءس}{(\sqrt{س} - ١)^٦}$ بوضع $ع = \sqrt{س} - ١$

∴ $س = (ع + ١)^٢$ ∴ $ءس = ٢ (ع + ١) ءع$

∴ $\int \frac{\sqrt{س} \, ءس}{(\sqrt{س} - ١)^٦}$

$= \int \frac{ع + ١}{ع^٦} \times ٢ (ع + ١) ءع$

$= \int \frac{٢ (ع^٢ + ٢ ع + ١)}{ع^٦} \, ءع$

$= \int (٢ ع^{-٤} + ٤ ع^{-٥} + ٢ ع^{-٦}) ءع$

$= \frac{٢ ع^{-٣}}{-٣} + \frac{٤ ع^{-٤}}{-٤} + \frac{٢ ع^{-٥}}{-٥} + ث$

$= \frac{-٢}{٣} ع^{-٣} - ع^{-٤} - \frac{٢}{٥} ع^{-٥} + ث$

$= \frac{-٢}{٣} (\sqrt{س} - ١)^{-٣} - (\sqrt{س} - ١)^{-٤}$

$- \frac{٢}{٥} (\sqrt{س} - ١)^{-٥} + ث$

(٢١) $\int \frac{س^٢}{\sqrt{٢ س - ١}} \, ءس$ بوضع $ع = ٢ س - ١$

∴ $س = \frac{١}{٢} ع + \frac{١}{٢}$ ∴ $ءس = \frac{١}{٢} ءع$

∴ $\int \frac{س^٢}{\sqrt{٢ س - ١}} \, ءس$

$= \int \frac{(\frac{١}{٢} ع + \frac{١}{٢})^٢}{\sqrt{ع}} \times \frac{١}{٢} ءع$

$= \int \frac{\frac{١}{٤} ع^٢ + \frac{١}{٢} ع + \frac{١}{٤}}{\sqrt{ع}} \times \frac{١}{٢} ءع$

$= \int \left(\frac{١}{٨} ع^{\frac{٣}{٢}} + \frac{١}{٤} ع^{\frac{١}{٢}} + \frac{١}{٨} ع^{-\frac{١}{٢}}\right) ءع$

$= \frac{١}{٨} \times \frac{٢}{٥} ع^{\frac{٥}{٢}} + \frac{١}{٤} \times \frac{٢}{٣} ع^{\frac{٣}{٢}}$

$+ \frac{١}{٨} \times \frac{٢}{١} ع^{\frac{١}{٢}} + ث$

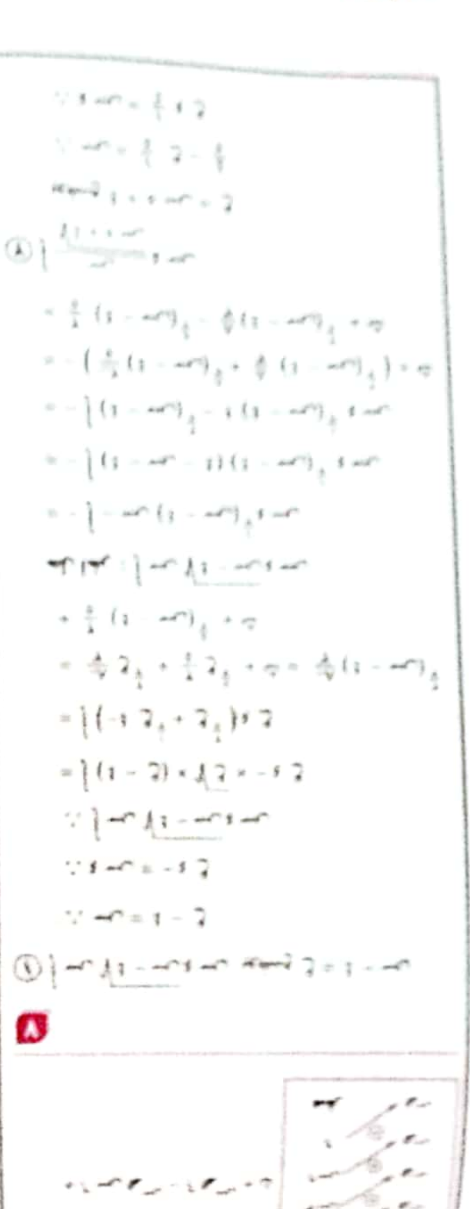
$= \frac{١}{٢٠} ع^{\frac{٥}{٢}} + \frac{١}{٦} ع^{\frac{٣}{٢}} + \frac{١}{٤} ع^{\frac{١}{٢}} + ث$

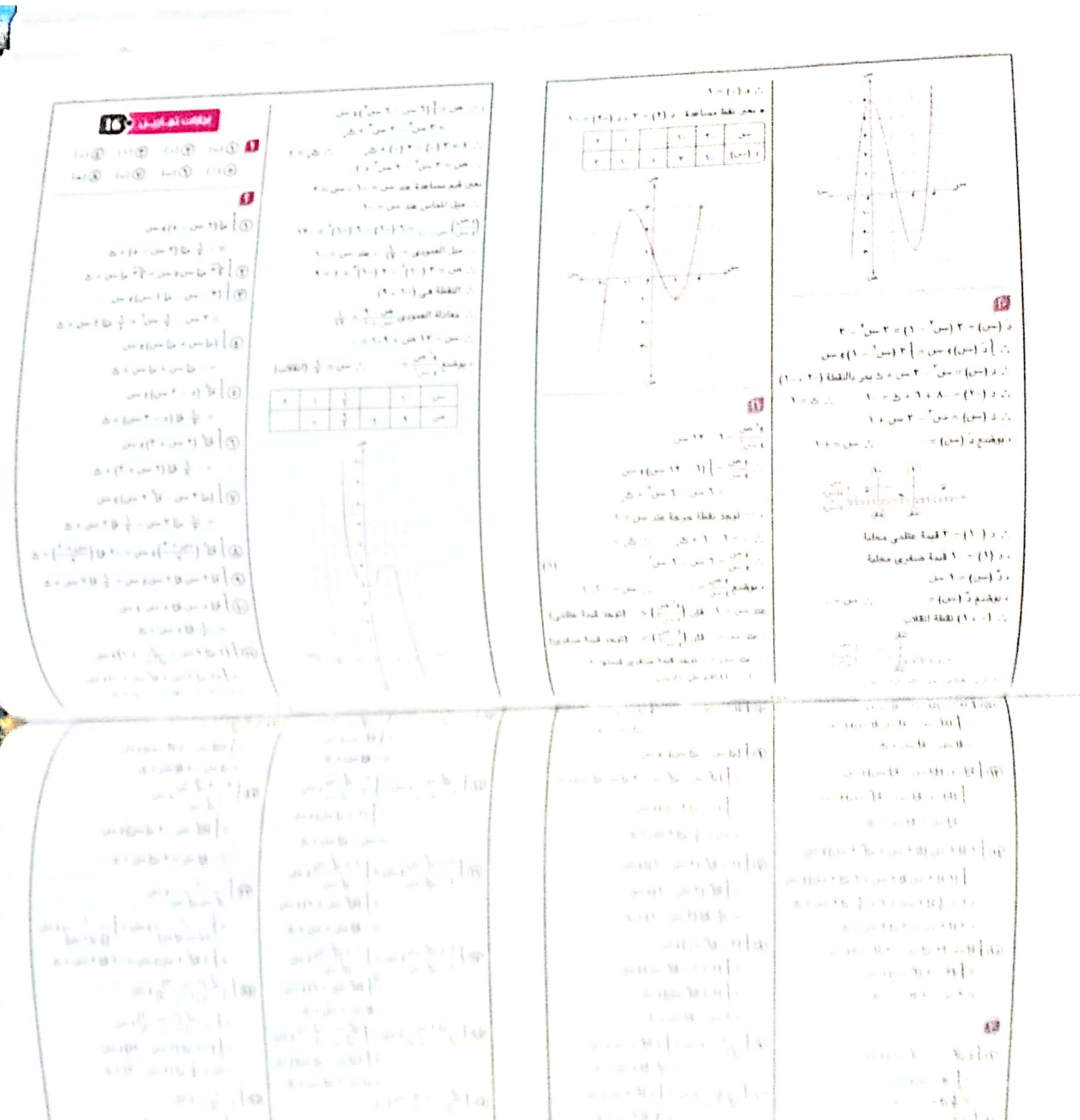
$= \frac{١}{٢٠} (٢ س - ١)^{\frac{٥}{٢}} + \frac{١}{٦} (٢ س - ١)^{\frac{٣}{٢}}$

$+ \frac{١}{٤} (٢ س - ١)^{\frac{١}{٢}} + ث$

(٢٢) $\int \frac{س^٣}{\sqrt{٢ - س^٢}} \, ءس$ بوضع $ع = ٢ - س^٢$

فإن: $س^٢ = ٢ - ع$ ∴ $٢ س \, ءس = - ءع$





(26) $\int \frac{\text{قا س}}{\text{قا س} + \text{ظا س}} \times \frac{\text{قا س} - \text{ظا س}}{\text{قا س} - \text{ظا س}} \, \text{ء س}$

$= \int \frac{\text{قا}^2 \text{س} - \text{قا س ظا س}}{\text{قا}^2 \text{س} - \text{ظا}^2 \text{س}} \, \text{ء س}$

$= \int (\text{قا}^2 \text{س} - \text{قا س ظا س}) \, \text{ء س}$

$= \text{ظا س} - \text{قا س} + \text{ث}$

(27) $\int \frac{1 + \text{جا}^3 \text{س}}{\text{جا}^2 \text{س}} \, \text{ء س} = \int \left(\frac{1}{\text{جا}^2 \text{س}} + \frac{\text{جا}^3 \text{س}}{\text{جا}^2 \text{س}} \right) \text{ء س}$

$= \int (\text{قتا}^2 \text{س} + \text{جا س}) \, \text{ء س}$

$= - \text{ظتا س} - \text{جتا س} + \text{ث}$

(28) $\int \frac{\text{جتا ٢ س}}{\text{جتا}^2 \text{س}} \, \text{ء س} = \int \frac{٢ \text{جتا}^2 \text{س} - ١}{\text{جتا}^2 \text{س}} \, \text{ء س}$

$= \int (٢ - \text{قا}^2 \text{س}) \, \text{ء س}$

$= ٢ \text{س} - \text{ظا س} + \text{ث}$

(29) $\int \frac{\text{ء س}}{\text{جا}^4 \text{س}} = \int \text{قتا}^4 \text{س} \, \text{ء س}$

$= \int \text{قتا}^2 \text{س} \times \text{قتا}^2 \text{س} \, \text{ء س}$

$= \int (١ + \text{ظتا}^2 \text{س}) \times \text{قتا}^2 \text{س} \, \text{ء س}$

[illegible]

(32) $\int \text{جا س جا ٢ س} \, \text{ء س}$

$= \int \text{جا س} (١ - ٢ \text{جا}^2 \text{س}) \, \text{ء س}$

$= \int (\text{جا س} - ٢ \text{جا س جا}^2 \text{س}) \, \text{ء س}$

$= - \text{جتا س} - \frac{٢}{٣} \text{جتا}^3 \text{س} + \text{ث}$

(33) $\int (\text{قا س} + \text{ظا س})^2 \, \text{ء س}$

$= \int (\text{قا}^2 \text{س} + ٢ \text{قا س ظا س} + \text{ظا}^2 \text{س}) \, \text{ء س}$

$= \int [(\text{قا}^2 \text{س} + ١) + (\text{ظا}^2 \text{س} + ١)] \, \text{ء س}$

$= \int (\text{قا}^2 \text{س} + \text{ظا}^2 \text{س}) \, \text{ء س} = \text{قا س} - \text{ظا س} + \text{ث}$

4

(1) $\int \text{جا}^2 \text{س} \, \text{ء س} = \int \left(\frac{١}{٢} - \frac{١}{٢} \text{جتا ٢ س} \right) \text{ء س}$

$= \frac{١}{٢} \text{س} - \frac{١}{٤} \text{جا ٢ س} + \text{ث}$

(2) $\int \text{جتا}^2 \text{س} \, \text{ء س} = \int \left(\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} \text{جتا ٢ س} \right) \text{ء س}$

$= \frac{١}{٢} \text{س} + \frac{١}{٤} \text{جا ٢ س} + \text{ث}$

(3) $\int (١ + \text{جا س})^2 \, \text{ء س}$

[illegible]

⑥ $\int$ جا ٥ س جا ٣ س ء س

$= \frac{1}{2} \int$ ٢ جا ٥ س جا ٣ س ء س

$= \frac{1}{2} \int$ [جا ٥ س جا ٣ س + جتا ٥ س جتا ٣ س − جتا ٥ س جتا ٣ س + جا ٥ س جا ٣ س] ء س

$= \frac{1}{2} \int$ [جتا (٥ س − ٣ س) − جتا (٥ س + ٣ س)] ء س

$= \frac{1}{2} \int$ [جتا ٢ س − جتا ٨ س] ء س

$= \frac{1}{4}$ جا ٢ س − $\frac{1}{16}$ جا ٨ س + ث

إجابات تمارين 17

1

$\int_{-2}^{4}$ (٣ س^2 − ٢) ء س

= [س^3 − ٢ س]$_{-2}^{4}$

= [٤^3 − ٢ (٤)] − [(−٢)^3 − ٢ (−٢)]

= ٥٦ + ٤ = ٦٠

2

① $\int_{1}^{4}$ ٧ ء س = [٧ س]$_{1}^{4}$ = ٧ × ٤ − ٧ × ١ = ٢١

② $\int$ (٢ س + ٣) ء س = [س^2 + ٣ س] ...

٩

$\int$ د(س) ء س

$= \int$ د(س) ء س $- \int$ د(س) ء س

$= ٢٥٥ - (-(-١٥)) = ٢٤٠$

١٠

$\int_{}^{٣}$ د(س) ء س

$= \int$ د(س) ء س $+ \int_{٢}^{٣}$ د(س) ء س

$= \int (٣ س - ٢)$ ء س $+ \int$ س^{٢} ء س

$= [\frac{٣}{٢}$ س^{٢} $- ٢$ س$] + [\frac{١}{٣}$ س$^{٣}]$

$= \frac{١١}{٢} + \frac{٨}{٣} = \frac{٤٩}{٦}$

١١

$\int$ د(س) ء س

$= \int ٢$ ء س $+ \int$ س ء س

$= [٢ س] + [\frac{١}{٢}$ س$^{٢}]$

$= (٤ - ٠) + (١٨ - ٢) = ٢٠$

١٢

$\int$ د(س) ء س

$= \int$ د(س) ء س $+ \int$ د(س) ء س

$= \int ٢$ س $+$ س^{٢} ء س $+ \int ٢$ س $-$ س^{٢} ء س

$= [$س$^{٢} + \frac{١}{٣}$ س$^{٣}] + [$س$^{٢} - \frac{١}{٣}$ س$^{٣}]$

$= \frac{٤}{٣} + ٠ + \frac{٤}{٣}$

١٣

$\int$ د(س) ء س

$= \int ($س$^{٢} + ١)$ ء س $+ \int (٣$ س $- ١)$ ء س

$= [\frac{١}{٣}$ س$^{٣} +$ س$] + [\frac{٣}{٢}$ س$^{٢} -$ س$]$

$= \frac{٤}{٣} + \frac{٧}{٢} = \frac{٢٩}{٦}$

١٤

① $\int |$س $- ١|$ ء س ، د(س) $= |$س $- ١|$

$= \begin{cases} -\text{س} + ١ & ، \text{س} < ١ \\ \text{س} - ١ & ، \text{س} \geq ١ \end{cases}$

$\therefore \int$ د(س) ء س

$= \int (-$س $+ ١)$ ء س $+ \int ($س $- ١)$ ء س

$= [-\frac{١}{٢}$ س$^{٢} +$ س$] + [\frac{١}{٢}$ س$^{٢} -$ س$]$

$= ٢ + ٢ = ٤$

② د(س) $= |$س $- ٢|$

$= \begin{cases} -\text{س} + ٢ & ، \text{س} < ٢ \\ \text{س} - ٢ & ، \text{س} \geq ٢ \end{cases}$

$\therefore \int$ د(س) ء س $= \int (-$س $+ ٢)$ ء س

$+ \int ($س $- ٢)$ ء س

$= [-\frac{١}{٢}$ س$^{٢} + ٢$ س$]$

$+ [\frac{١}{٢}$ س$^{٢} - ٢$ س$] = \frac{٥}{٢} + ٢ = \frac{١٣}{٢}$

③ د(س) $= |$س $- ٢|$

$= \begin{cases} -\text{س} + ٢ & ، \text{س} < ٢ \\ \text{س} - ٢ & ، \text{س} \geq ٢ \end{cases}$

$\therefore \int$ د(س) ء س

$= \int (-$س $+ ٢)$ ء س $+ \int ($س $- ٢)$ ء س

$= [-\frac{١}{٢}$ س$^{٢} + ٢$ س$] + [\frac{١}{٢}$ س$^{٢} - ٢$ س$]$

④ د(س) $= |$س $+ ١|$

$= \begin{cases} -\text{س} - ١ & ، \text{س} < -١ \\ \text{س} + ١ & ، \text{س} \geq -١ \end{cases}$

$\therefore \int$ د(س) ء س

$= \int (-$س $- ١)$ ء س $+ \int ($س $+ ١)$ ء س

$= [-\frac{١}{٢}$ س$^{٢} -$ س$] + [\frac{١}{٢}$ س$^{٢} +$ س$]$

$= \frac{٤}{٢} + \frac{٤}{٢} = ٩$

⑤ د(س) $= |٢$س $- ٣|$

$= \begin{cases} -٢\text{س} + ٣ & ، \text{س} < \frac{٣}{٢} \\ ٢\text{س} - ٣ & ، \text{س} \geq \frac{٣}{٢} \end{cases}$

$\therefore \int$ د(س) ء س

$= \int (-٢$س $+ ٣)$ ء س $+ \int (٢$س $- ٣)$ ء س

$= [-$س$^{٢} + ٣$ س$] + [$س$^{٢} - ٣$ س$]$

$= \frac{٩}{٤} + \frac{١}{٤} = \frac{٥}{٢}$

⑥ د(س) $= |٢$س $- ١|$

$= \begin{cases} -٢\text{س} + ١ & ، \text{س} < \frac{١}{٢} \\ ٢\text{س} - ١ & ، \text{س} \geq \frac{١}{٢} \end{cases}$

$\therefore \int$ د(س) ء س

$= \int (-٢$س $+ ١)$ ء س $+ \int (٢$س $- ١)$ ء س

$= [-$س$^{٢} +$ س$] + [$س$^{٢} -$ س$]$

$= \frac{١}{٤} + \frac{٩}{٤} = \frac{٥}{٢}$

⑦ د(س) $= \sqrt{\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٤} = |$س $+ ٢|$ ...

$\therefore \int$ د(س) ء س

$= \int$ س^{٢} ء س

$= \int (-$س $- ٢)$ ء س

$= [$س$^{٢} + ٢$ س$] + [\frac{١}{٣}$ س$^{٣}]$

$= \frac{١}{٣} + ٢ + \frac{٥}{٣} = ٤$

⑧ د(س) $= |$س$^{٢} -$ س$| = \begin{cases} \text{س}^{٢} - \text{س} & ، \text{س} < ٠ \\ -\text{س}^{٢} + \text{س} & ، ٠ \leq \text{س} < ١ \end{cases}$

$\therefore \int$ د(س) ء س

$= \int -$س^{٢} ء س $+ \int$ س^{٢} ء س

$= [-\frac{١}{٣}$ س$^{٣}] + [\frac{١}{٣}$ س$^{٣}]$

$= \frac{١}{٣} + ٩ = \frac{٢٨}{٣}$

⑨ د(س) $= ٣$س$^{٢} - ١٢ |$س$|$

$= \begin{cases} ٣\text{س}^{٢} + ١٢\text{س} & ، \text{س} < ٠ \\ ٣\text{س}^{٢} - ١٢\text{س} & ، \text{س} \geq ٠ \end{cases}$

$\therefore \int$ د(س) ء س

$= \int (٣$س$^{٢} + ١٢$س$)$ ء س

$= [$س$^{٣} + ٦$ س$^{٢}] = ٢٠$

⑩ د(س) $= |$س$| -$ س^{٢}

$= \begin{cases} -\text{س} - \text{س}^{٢} & ، \text{س} < ٠ \\ \text{س} - \text{س}^{٢} & ، \text{س} \geq ٠ \end{cases}$

$\therefore \int$ د(س) ء س $= \int (-$س $-$ س$^{٢})$ ء س $+ \dots$

$+ \int ($س $-$ س$^{٢})$ ء س

$= [\frac{١}{٢}$ س$^{٢} - \frac{١}{٣}$ س$^{٣}]$

(١١)

د(س) $= |$س$^{٢} - ٩|$

$= \begin{cases} \text{س}^{٢} - ٩ & ، \text{س} \leq -٣ \\ -\text{س}^{٢} + ٩ & ، -٣ < \text{س} < ٣ \\ \text{س}^{٢} - ٩ & ، \text{س} \geq ٣ \end{cases}$

$\therefore \int_{-١}^{٣}$ د(س) ء س $= \int_{-١}^{٣} (-$س$^{٢} + ٩)$ ء س

$= [-\frac{١}{٣}$ س$^{٣} + ٩$ س$]_{-١}^{٣}$

$= \frac{٥٢}{٣}$

(١٢)

د(س) $= |$س$^{٢} - ٤|$

$= \begin{cases} \text{س}^{٢} - ٤ & ، \text{س} \leq -٢ \\ -\text{س}^{٢} + ٤ & ، -٢ < \text{س} < ٢ \\ \text{س}^{٢} - ٤ & ، \text{س} \geq ٢ \end{cases}$

$\therefore \int_{-٣}^{٣}$ د(س) ء س

$= \int_{-٣}^{-٢} ($س$^{٢} - ٤)$ ء س

$+ \int_{-٢}^{٢} (-$س$^{٢} + ٤)$ ء س

$+ \int_{٢}^{٣} ($س$^{٢} - ٤)$ ء س

$= [\frac{١}{٣}$ س$^{٣} - ٤$ س$] + [-\frac{١}{٣}$ س$^{٣} + ٤$ س$]$

$+ [\frac{١}{٣}$ س$^{٣} - ٤$ س$] = \frac{٧}{٣} + \frac{٣٢}{٣} + \frac{٧}{٣}$

$= \frac{٤٦}{٣} = ١٥\frac{١}{٣}$

(١٣)

د(س) $= |$س$^{٢} - ٤$ س$|$

$= \begin{cases} \text{س}^{٢} - ٤\text{س} & ، \text{س} \leq ٠ \\ -\text{س}^{٢} + ٤\text{س} & ، ٠ < \text{س} < ٤ \\ \text{س}^{٢} - ٤\text{س} & ، \text{س} \geq ٤ \end{cases}$

$\therefore \int$ د(س) ء س $= \int ($س$^{٢} - ٤$ س$)$ ء س

$+ \int (-$س$^{٢} + ٤$ س$)$ ء س

$+ \int ($س$^{٢} - ٤$ س$)$ ء س

$= [\frac{١}{٣}$ س$^{٣} - ٢$ س$^{٢}]$

$+ [-\frac{١}{٣}$ س$^{٣} + ٢$ س$^{٢}] + [\frac{١}{٣}$ س$^{٣} - ٢$ س$^{٢}]$

$= \frac{٧}{٣} + \frac{٣٢}{٣} + \frac{٧}{٣} = \frac{٤٦}{٣} = ١٥\frac{١}{٣}$

١٥

① (د)	② (ج)	③ (أ)	④ (ج)	⑤ (ب)
⑥ (د)	⑦ (ب)	⑧ (ب)	⑨ (ب)	⑩ (ج)
⑪ (ب)	⑫ (ب)	⑬ (ج)	⑭ (أ)	⑮ (د)
⑯ (أ)	⑰ (ب)	⑱ (ب)	⑲ (ب)	⑳ (د)
㉑ (د)	㉒ (ج)			

١٦

① $\because$ د(س) $= \frac{\text{س}}{١ + \text{س}^{٢}}$ فردية

$\therefore \int_{-٢}^{٢} \frac{\text{س}}{١ + \text{س}^{٢}}$ ء س $=$ صفر

② $\because$ د(س) $= \frac{\text{س}^{٣} - ٣\text{س}}{\text{س}^{٢} + ١}$ فردية

$\therefore \int \frac{\text{س}^{٣} - ٣\text{س}}{\text{س}^{٢} + ١}$ ء س $=$ صفر

③ $\because$ د(س) $=$ س$^{٢} - ١$ زوجية

$\therefore \int ($س$^{٢} - ١)$ ء س $= ٢ \int ($س$^{٢} - ١)$ ء س

$= ٢ [\frac{١}{٣}$ س$^{٣} -$ س$] = ١٢$

④ $\because$ د(س) $=$ س$^{٣} \sqrt{\text{س}^{٢} + ٢}$ فردية

$\therefore \int ($س$^{٣} \sqrt{\text{س}^{٢} + ٢})$ ء س $=$ صفر

⑤ $\because$ د(س) $= ٤ - |$س$|$ زوجية

$\therefore \int$ د(س) ء س $= ٢ \int (٤ - |$س$|)$ ء س

$= ٢ \int (٤ -$ س$)$ ء س

$= ٢ [٤$ س $- \frac{١}{٢}$ س$^{٢}]$

$= ٢ \times (٨) = ١٦$

⑥ $\because$ د(س) $=$ س$^{٢} (٣ - ٢ |$س$|)$ زوجية

$\therefore \int$ س$^{٢} (٣ - ٢ |$س$|)$ ء س

$= ٢ \int$ س$^{٢} (٣ - ٢$ س$)$ ء س

$= ٢ \int (٣$ س$^{٢} - ٢$ س$^{٣})$ ء س

$= ٢ [$س$^{٣} - \frac{١}{٢}$ س$^{٤}] = ٢ \times ٠ =$ صفر

⑦ د(س) $= (٢$ س$^{٣} - ٣$ جا $\frac{\pi}{٢}$ س$)$ فردية

$\therefore \int$ د(س) ء س $=$ صفر

⑧ $\because$ د(س) $= \sqrt{\text{س}^{٤} + \text{س}^{٢}}$ زوجية

$\therefore \int$ د(س) ء س $= ٢ \int \sqrt{\text{س}^{٤} + \text{س}^{٢}}$ ء س

$= ٢ \int |$س$| \sqrt{\text{س}^{٢} + ١}$ ء س

$= \int ٢$ س $\sqrt{\text{س}^{٢} + ١}$ ء س

$= [\frac{٢}{٣} ($س$^{٢} + ١)^{\frac{٣}{٢}}]$

$= \frac{٢}{٣} [٢\sqrt{٢} - ١] = \frac{٤\sqrt{٢} - ٢}{٣}$

⑨ د(س) $= |$جا س$|$ دالة زوجية

$\therefore \int_{-\frac{\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٢}}$ د(س) ء س

$= ٢ \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ د(س) ء س $= ٢ \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ جا س ء س

$= ٢ [-$جتا س$]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$

$= ٢ [٠ + ١] = ٢$

١٧

① د(س) $=$ س^{٢} دالة زوجية

$\therefore \int$ س^{٢} ء س $= \int$ س^{٢} ء س $= \frac{٨}{٣}$

② $\int$ س^{٢} ء س $= ٢ \int$ س^{٢} ء س $= ٢ \times \frac{٨}{٣} = \frac{١٦}{٣}$

③ $\int -$س^{٢} ء س $= - \int$ س^{٢} ء س $= -\frac{٨}{٣}$

١٨

د(س) $=$ س^{٣} دالة فردية

① $\int$ س^{٣} ء س $= - \int$ س^{٣} ء س $= -٤$

② $\int$ س^{٣} ء س $=$ صفر

③ $\int ٢$ س^{٣} ء س $= ٢ \int$ س^{٣} ء س

$= ٢ \times ٤ = ١٢$

١٩

① $\int [$د(س) $- ٢]$ ء س

$= \int$ د(س) ء س $- \int ٢$ ء س

$= ٣ - [٢$ س$] = ٣ - (٨ - ٠) = -٥$

② $\int$ د(س) ء س $=$ صفر

③ $\int$ د(س) ء س $= ٢ \int$ د(س) ء س

$= ٢ \times ٣ = ٦$

٢٠

$\int$ د(س) ء س $= \int$ د(س) ء س

$+ \int$ د(س) ء س

$=$ صفر $+ ٩ = ٩$

٤٣

١	٢	٣	٤	٥
(أ)	(ج)	(د)	(أ)	(د)

٦	٧	٨	٩	١٠
(أ)	(ج)	(ب)	(ب)	(ج)

١١	١٢	١٣	١٤	١٥
(ب)	(ج)	(ج)	(ب)	(ب)

١٦	١٧	١٨	١٩	٢٠
(ب)	(ب)	(ج)	(أ)	(ب)

٢١	٢٢	٢٣	٢٤	٢٥
(ج)	(ب)	(ب)	(ج)	(ج)

٢٦	٢٧
(ج)	(ب)

٤٤

١	٢	٣	٤	٥
(ب)	(ج)	(ج)	(د)	(ج)

٦	٧	٨	٩	١٠
(ج)	(أ)	(د)	(ج)	(ج)

١١	١٢	١٣	١٤	١٥
(ج)	(ج)	(ب)	(ب)	(ب)

١٦	١٧	١٨	١٩	٢٠
(أ)	(د)	(أ)	(ب)	(ج)

٢١
(ج)

إرشادات لحل رقم ٤٤

① بوضع ن = ٢ س ∴ ء ن = ٢ ء س

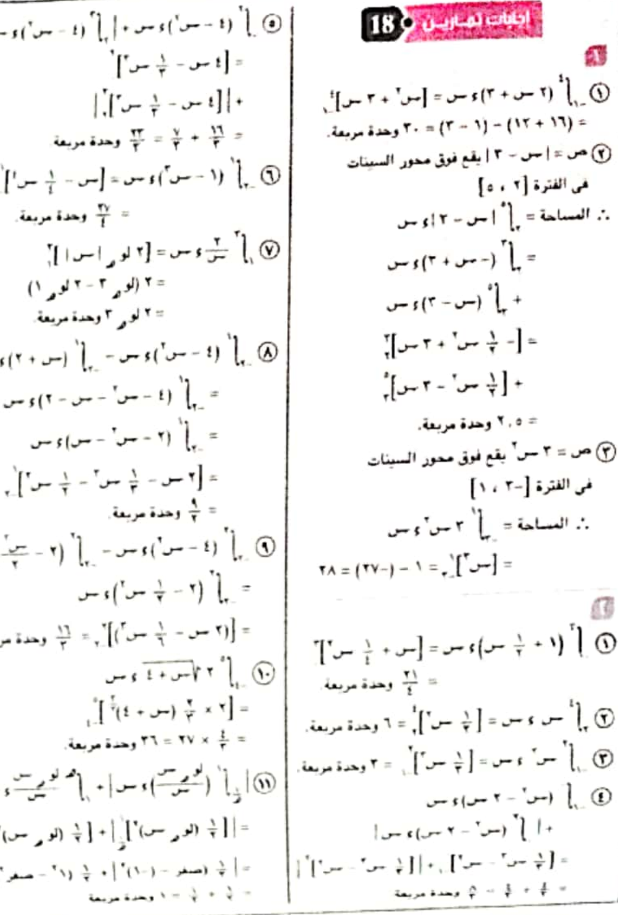
، عند س = ٦ فإن ن = ١٢

، عند س = ١٢ فإن ن = ٢٤

• في التكامل المعطى

• في التكامل المطلوب

إجابات تمارين 18



1

① $\int_{-1}^{4}(2س+3)\,ءس = [س^2+3س]_{-1}^{4}$

$=(16+12)-(1-3)=30$ وحدة مربعة.

② ص $=|س-2|$ يقع فوق محور السينات

فى الفترة $[2 ، 5]$

∴ المساحة $=\int_{2}^{5}|س-2|\,ءس$

$=\int_{2}^{2}(-س+2)\,ءس$

$+\int_{2}^{5}(س-2)\,ءس$

$=[-\frac{1}{2}س^2+2س]_{2}^{2}$

$+[\frac{1}{2}س^2-2س]_{2}^{5}$

$=4.5$ وحدة مربعة.

③ ص $=3س^2$ يقع فوق محور السينات

فى الفترة $[-3 ، 1]$

∴ المساحة $=\int_{-3}^{1}3س^2\,ءس$

$=[س^3]_{-3}^{1}=1-(-27)=28$

2

① $\int^{2}(1+\frac{1}{2}س)\,ءس=[س+\frac{1}{4}س^2]^{2}$

$=\frac{21}{4}$ وحدة مربعة

② $\int_{2}^{4}س\,ءس=[\frac{1}{2}س^2]_{2}^{4}=6$ وحدة مربعة.

③ $\int_{1}^{2}س^2\,ءس=[\frac{1}{3}س^3]_{1}^{2}=3$ وحدة مربعة.

④ $\int_{1}(س^2-2س)\,ءس$

$+|\int^{2}(س^2-2س)\,ءس|$

$=[\frac{1}{3}س^3-س^2]_{1}+|[\frac{1}{3}س^3-س^2]^{2}|$

$=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$ وحدة مربعة

⑤ $\int^{2}(4-س^2)\,ءس+|\int_{2}^{3}(4-س^2)\,ءس|$

$=[4س-\frac{1}{3}س^3]^{2}$

$+|[4س-\frac{1}{3}س^3]_{2}^{3}|$

$=\frac{16}{3}+\frac{7}{3}=\frac{23}{3}$ وحدة مربعة

⑥ $\int_{-2}^{1}(1-س^3)\,ءس=[س-\frac{1}{4}س^4]_{-2}^{1}$

$=\frac{27}{4}$ وحدة مربعة

⑦ $\int_{1}^{3}\frac{2}{س}\,ءس=[2\,لو_{هـ}|س|]_{1}^{3}$

$=2(لو_{هـ}3-2\,لو_{هـ}1)$

$=2\,لو_{هـ}3$ وحدة مربعة

⑧ $\int_{-2}^{1}(4-س^2)\,ءس-\int_{-2}^{1}(س+2)\,ءس$

$=\int_{-2}^{1}(4-س^2-س-2)\,ءس$

$=\int_{-2}^{1}(2-س^2-س)\,ءس$

$=[2س-\frac{1}{2}س^2-\frac{1}{3}س^3]_{-2}^{1}$

$=\frac{9}{2}$ وحدة مربعة

⑨ $\int_{-2}^{2}(4-س^2)\,ءس-\int_{-2}^{2}(2-\frac{س^2}{2})\,ءس$

$=\int_{-2}^{2}(2-\frac{1}{2}س^2)\,ءس$

$=[(2س-\frac{1}{6}س^3)]_{-2}^{2}=\frac{16}{3}$ وحدة مربعة

⑩ $\int_{-4}^{5}2\sqrt{س+4}\,ءس$

$=[2\times\frac{2}{3}(س+4)^{\frac{3}{2}}]_{-4}^{5}$

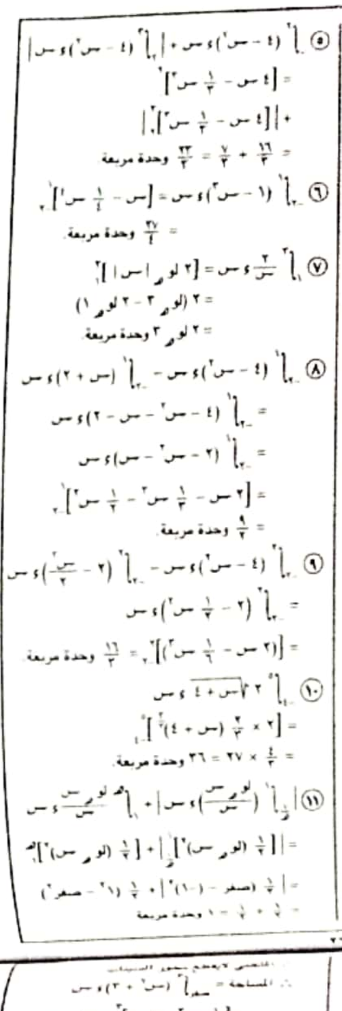
$=\frac{4}{3}\times27=36$ وحدة مربعة.

⑪ $|\int_{\frac{1}{هـ}}^{1}(\frac{لو_{هـ}س}{س})\,ءس|+\int_{1}^{هـ}\frac{لو_{هـ}س}{س}\,ءس$

$=|[\frac{1}{2}(لو_{هـ}س)^2]_{\frac{1}{هـ}}^{1}|+[\frac{1}{2}(لو_{هـ}س)^2]_{1}^{هـ}$

$=|\frac{1}{2}(صفر-(-1)^2)|+\frac{1}{2}(1^2-صفر^2)$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ وحدة مربعة



⑫ $|\int^{1}(هـ^{س}-هـ)\,ءس|+\int_{1}^{2}(هـ^{س}-هـ)\,ءس$

$=|[هـ^{س}-هـس]^{1}|+[هـ^{س}-هـس]_{1}^{2}$

$=|\cdot-1|+((هـ^2-2هـ)-(هـ-هـ))$

$=1+هـ^2-2هـ=هـ^2-2هـ+1$

$=(هـ-1)^2$ وحدة مربعة

3

①

س $+2$ص $=9$ ∴ ص $=\frac{-1}{2}س+\frac{9}{2}$

∴ المساحة $=\int_{1}^{3}(\frac{-1}{2}س+\frac{9}{2})\,ءس$

$=[\frac{-1}{4}س^2+\frac{9}{2}س]_{1}^{3}$

$=7$ وحدة مربعة.

②

• نقط التقاطع للمنحنى مع محور السينات

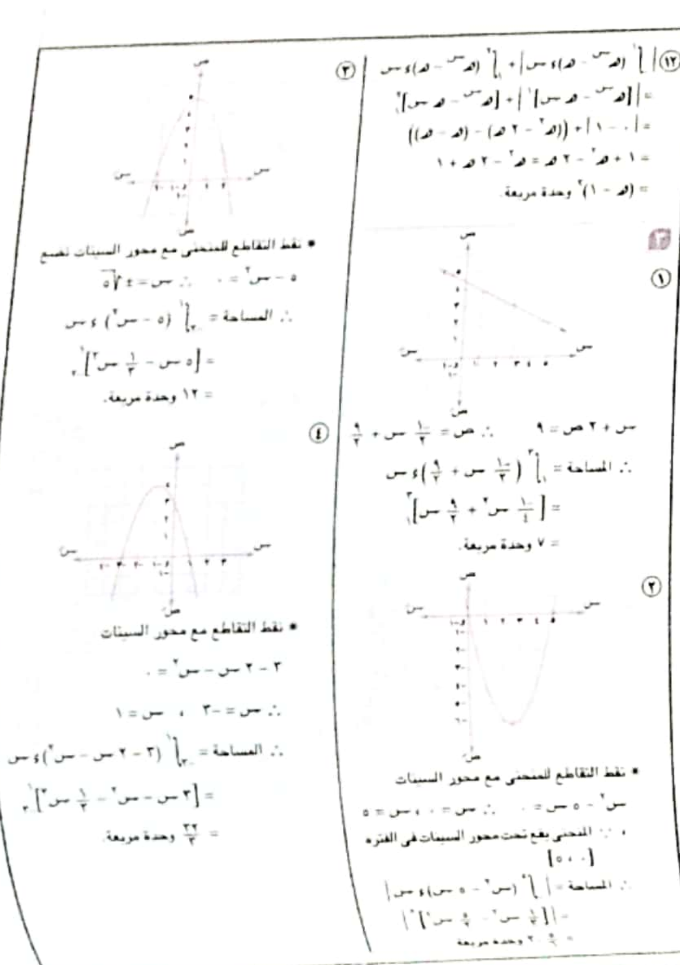
$س^2-5س=\cdot$ ∴ س $=\cdot$ ، س $=5$

• ∵ المنحنى يقع تحت محور السينات فى الفترة $[\cdot ، 5]$

∴ المساحة $=|\int^{5}(س^2-5س)\,ءس|$

$=|[\frac{1}{3}س^3-\frac{5}{2}س^2]^{5}|$

$=\frac{125}{6}$ وحدة مربعة



③

• نقط التقاطع للمنحنى مع محور السينات تضع

$5-س^2=\cdot$ ∴ س $=\pm\sqrt{5}$

∴ المساحة $=\int_{-1}^{1}(5-س^2)\,ءس$

$=[5س-\frac{1}{3}س^3]_{-1}^{1}$

$=12$ وحدة مربعة.

④

• نقط التقاطع مع محور السينات

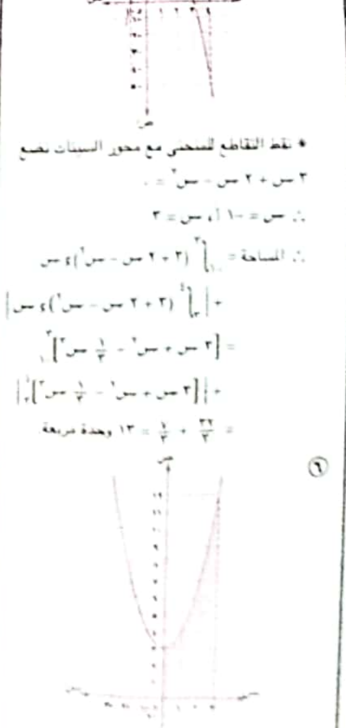
$3-2س-س^2=\cdot$

∴ س $=-3$ ، س $=1$

∴ المساحة $=\int_{-1}^{1}(3-2س-س^2)\,ءس$

$=[3س-س^2-\frac{1}{3}س^3]_{-1}^{1}$

$=\frac{32}{3}$ وحدة مربعة



⑤

• نقط التقاطع للمنحنى مع محور السينات تضع

$3+2س-س^2=\cdot$

∴ س $=-1$ أو س $=3$

∴ المساحة $=\int_{-1}^{3}(3+2س-س^2)\,ءس$

$+|\int_{3}^{4}(3+2س-س^2)\,ءس|$

$=[3س+س^2-\frac{1}{3}س^3]_{-1}^{3}$

$+|[3س+س^2-\frac{1}{3}س^3]_{3}^{4}|$

$=\frac{32}{3}+\frac{7}{3}=13$ وحدة مربعة

⑥

• نقط التقاطع للمنحنى مع محور السينات تضع

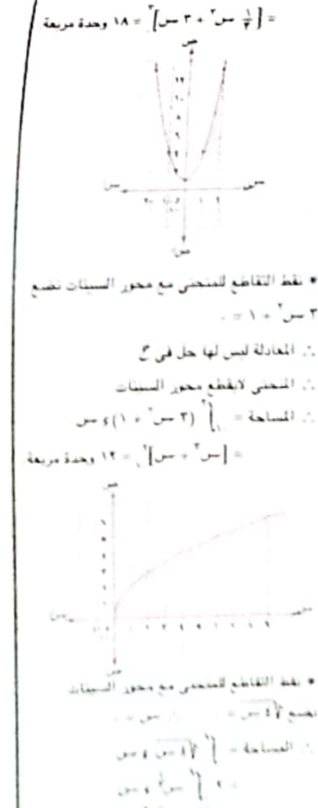
$س^2+3=\cdot$

∴ المعادلة ليس لها حل فى ح

∴ المنحنى لا يقطع محور السينات

∴ المساحة $=\int_{صفر}^{3}(س^2+3)\,ءس$

$=[\frac{1}{3}س^3+3س]^{3}=18$ وحدة مربعة



⑦

• نقط التقاطع للمنحنى مع محور السينات تضع

$3س^2+1=\cdot$

∴ المعادلة ليس لها حل فى ح

∴ المنحنى لا يقطع محور السينات

∴ المساحة $=\int_{1}^{2}(3س^2+1)\,ءس$

$=[س^3+س]_{1}^{2}=12$ وحدة مربعة

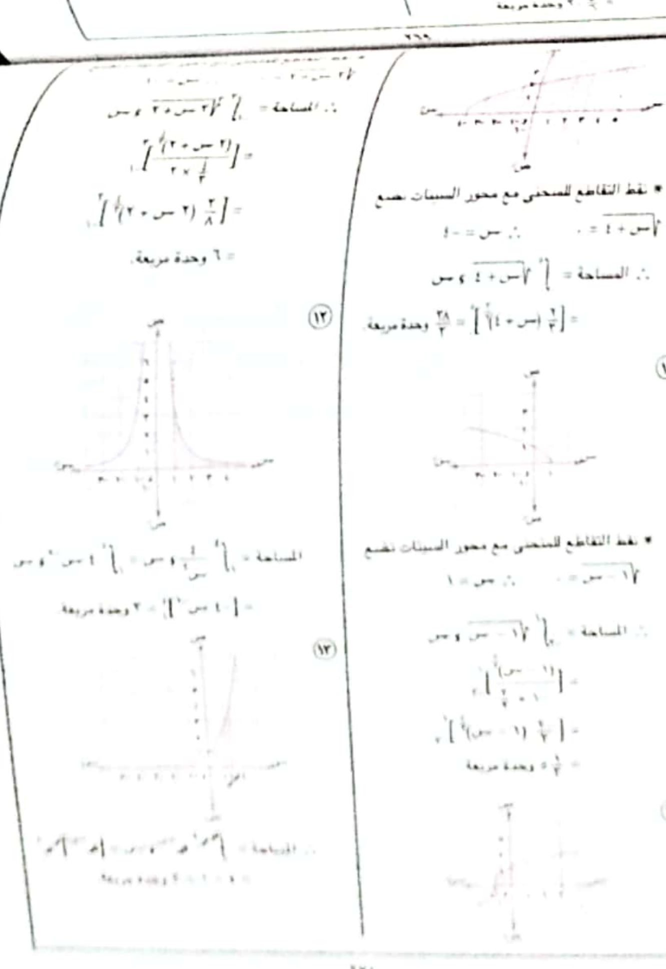
⑧

• نقط التقاطع للمنحنى مع محور السينات تضع $\sqrt{4س}=\cdot$ ∴ س $=\cdot$

∴ المساحة $=\int^{9}\sqrt{4س}\,ءس$

$=2\int^{9}س^{\frac{1}{2}}\,ءس$

$=2[\frac{2}{3}س^{\frac{3}{2}}]^{9}=36$ وحدة مربعة



⑨

• نقط التقاطع للمنحنى مع محور السينات تضع

$\sqrt{س+4}=\cdot$ ∴ س $=-4$

∴ المساحة $=\int^{5}\sqrt{س+4}\,ءس$

$=[\frac{2}{3}(س+4)^{\frac{3}{2}}]^{5}=\frac{38}{3}$ وحدة مربعة

⑩

• نقط التقاطع للمنحنى مع محور السينات تضع

$\sqrt{1-س}=\cdot$ ∴ س $=1$

∴ المساحة $=\int_{\cdot}^{1}\sqrt{1-س}\,ءس$

$=[\frac{(1-س)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\times1-}]_{\cdot}^{1}$

$=[\frac{-2}{3}(1-س)^{\frac{3}{2}}]_{\cdot}^{1}$

$=\frac{2}{3}$ وحدة مربعة

⑪

$\sqrt{2س+2}=\cdot$ ∴ س $=-1$

∴ المساحة $=\int_{-1}^{3}\sqrt{2س+2}\,ءس$

$=[\frac{(2س+2)^{\frac{3}{2}}}{2\times\frac{3}{2}}]_{-1}^{3}$

$=[\frac{2}{8}(2س+2)^{\frac{3}{2}}]_{-1}^{3}$

$=6$ وحدة مربعة.

⑫

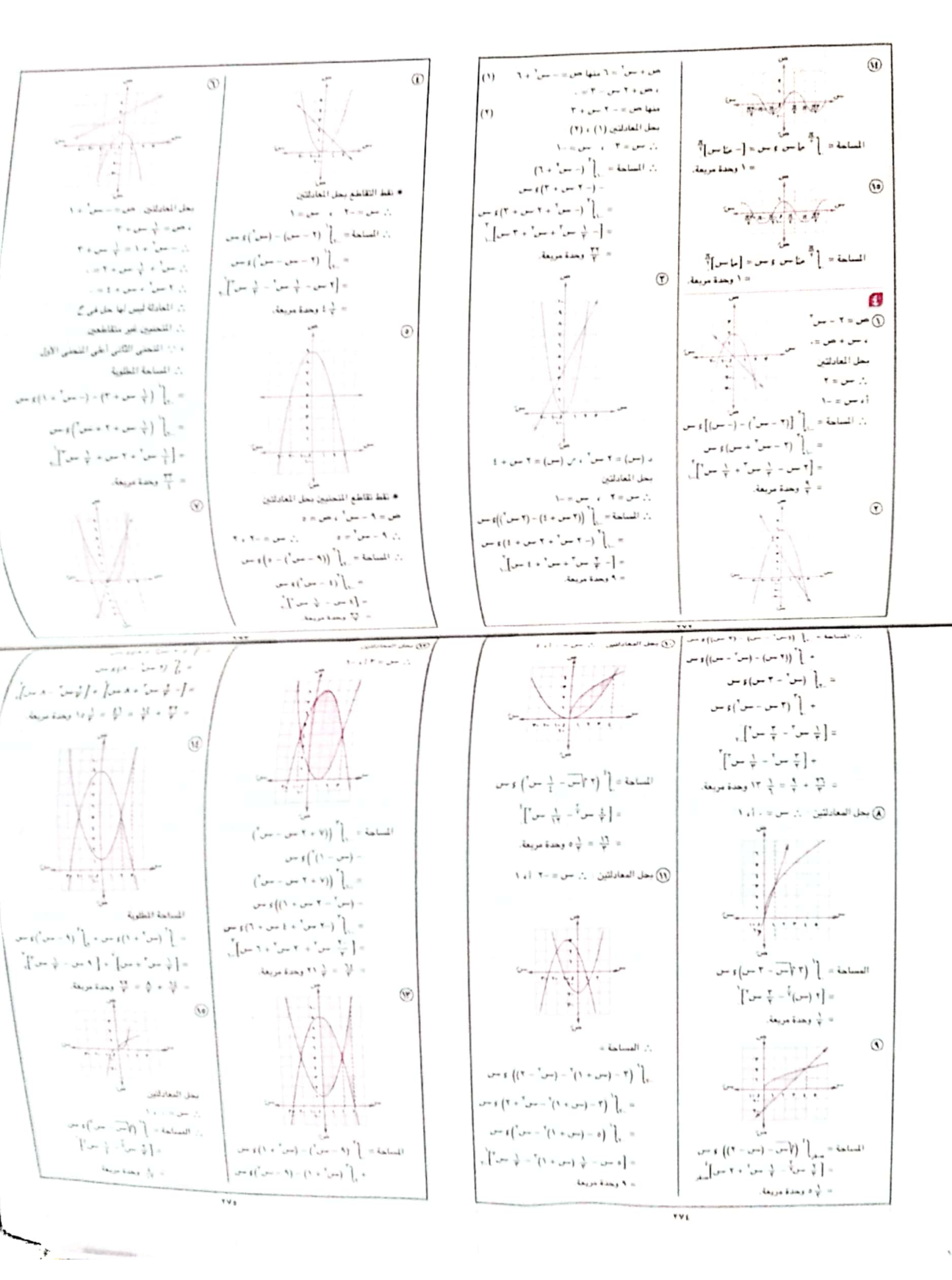
المساحة $=\int_{1}^{4}\frac{4}{س^2}\,ءس=\int_{1}^{4}4س^{-2}\,ءس$

$=[-4س^{-1}]_{1}^{4}=3$ وحدة مربعة

⑬

∴ المساحة $=\int^{2}هـ^{س}\,ءس=[هـ^{س}]^{2}$

$=\ldots$ وحدة مربعة



⑭

المساحة = $\int$ جا س ء س = [− جتا س] = ١ وحدة مربعة.

⑮

المساحة = $\int$ جا س ء س = [جا س] = ١ وحدة مربعة.

4

① ص = ٢ − س^2 ، س + ص = ٠

بحل المعادلتين

∴ س = ٢ أ، س = −١

∴ المساحة = $\int_{-1}^{2}$ [(٢ − س^2) − (− س)] ء س

= $\int_{-1}^{2}$ (٢ − س^2 + س) ء س

= [٢ س − $\frac{1}{3}$ س^3 + $\frac{1}{2}$ س^2]

= $\frac{9}{2}$ وحدة مربعة.

②

ص + س^2 = ٦ منها ص = − س^2 + ٦ (١)

، ص + ٢ س − ٣ = ٠

منها ص = − ٢ س + ٣ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢)

∴ س = ٣ ، س = −١

∴ المساحة = $\int_{-1}^{3}$ (− س^2 + ٦)

− (− ٢ س + ٣) ء س

= $\int_{-1}^{3}$ (− س^2 + ٢ س + ٣) ء س

= [− $\frac{1}{3}$ س^3 + س^2 + ٣ س]

= $\frac{32}{3}$ وحدة مربعة.

③

د (س) = ٢ س^2 ، ر (س) = ٢ س + ٤

بحل المعادلتين

∴ س = ٢ ، س = −١

∴ المساحة = $\int_{-1}^{2}$ ((٢ س + ٤) − (٢ س^2)) ء س

= $\int_{-1}^{2}$ (− ٢ س^2 + ٢ س + ٤) ء س

= [− $\frac{2}{3}$ س^3 + س^2 + ٤ س]

= ٩ وحدة مربعة

④

* نقط التقاطع بحل المعادلتين

∴ س = −٢ ، س = ١

∴ المساحة = $\int_{-2}^{1}$ ((٢ − س) − (س)^2) ء س

= $\int_{-2}^{1}$ (٢ − س − س^2) ء س

= [٢ س − $\frac{1}{2}$ س^2 − $\frac{1}{3}$ س^3]

= $\frac{1}{2}$ ٤ وحدة مربعة.

⑤

* نقط تقاطع المنحنيين بحل المعادلتين

ص = ٩ − س^2 ، ص = ٥

∴ ٩ − س^2 = ٥ ∴ س = −٢ ، ٢

∴ المساحة = $\int_{-2}^{2}$ ((٩ − س^2) − ٥) ء س

= $\int_{-2}^{2}$ (٤ − س^2) ء س

= [٤ س − $\frac{1}{3}$ س^3]

= $\frac{32}{3}$ وحدة مربعة

⑥

بحل المعادلتين ص = − س^2 + ١

، ص = $\frac{1}{2}$ س + ٣

∴ − س^2 + ١ = $\frac{1}{2}$ س + ٣

∴ س^2 + $\frac{1}{2}$ س + ٢ = ٠

∴ ٢ س^2 + س + ٤ = ٠

∴ المعادلة ليس لها حل في ح

∴ المنحنيان غير متقاطعين

∴ المنحنى الثاني أعلى المنحنى الأول

∴ المساحة المطلوبة

= $\int$ ($\frac{1}{2}$ س + ٣) − (− س^2 + ١) ء س

= $\int$ ($\frac{1}{2}$ س + ٢ + س^2) ء س

= [$\frac{1}{4}$ س^2 + ٢ س + $\frac{1}{3}$ س^3]

= $\frac{32}{3}$ وحدة مربعة.

⑦

⑧ بحل المعادلتين ∴ س = ٠ أ، ١

المساحة = $\int_{0}^{1}$ (٣ $\sqrt{س}$ − ٣ س) ء س

= [٢ (س)$^{\frac{3}{2}}$ − $\frac{3}{2}$ س^2]

= $\frac{1}{2}$ وحدة مربعة.

⑨

المساحة = $\int$ ($\sqrt{س}$ − (س − ٢)) ء س

= $\frac{1}{6}$ ٥ وحدة مربعة.

⑩ بحل المعادلتين

المساحة = $\int$ (٢ $\sqrt{س}$ − $\frac{1}{4}$ س^2) ء س

= $\frac{16}{3}$ = $\frac{1}{3}$ ٥ وحدة مربعة.

⑪ بحل المعادلتين ∴ س = −٢ أ، ١

∴ المساحة =

= ٩ وحدة مربعة

⑫ بحل المعادلتين

المساحة = $\int$ ((٧ + ٢ س − س^2)

− (س − ١)^2) ء س

= $\int$ (− ٢ س^2 + ٤ س + ٦) ء س

= [− $\frac{2}{3}$ س^3 + ٢ س^2 + ٦ س]

= $\frac{64}{3}$ = $\frac{1}{3}$ ٢١ وحدة مربعة

⑬

المساحة = $\int$ (٩ − س^2) − (س^2 + ١) ء س

⑭

المساحة المطلوبة

= $\frac{32}{3}$ وحدة مربعة.

⑮

بحل المعادلتين

∴ س = ٠ ، ١

∴ المساحة = $\int_{0}^{1}$ ($\sqrt{س}$ − س^2) ء س

= $\frac{1}{3}$ وحدة مربعة

(١٦)

لحل المعادلتين معًا نضع

س^{٣} − ٤ س = ٤ س − س^{٣}

∴ ٢ (س^{٣} − ٤ س) = ٠

∴ ٢ س (س^{٢} − ٤) = ٠

∴ ٢ س (س + ٢) (س − ٢) = ٠

∴ س = ٠ أو س = ٢ أو س = −٢

المساحة = $\int_{-٢}^{٠}$ [(س^{٣} − ٤ س) − (٤ س − س^{٣})] ء س + $\int_{٠}^{٢}$ [(٤ س − س^{٣}) − (س^{٣} − ٤ س)] ء س

= $\int_{-٢}^{٠}$ (٢ س^{٣} − ٨ س) ء س + $\int_{٠}^{٢}$ (−٢ س^{٣} + ٨ س) ء س

= [$\frac{١}{٢}$ س^{٤} − ٤ س^{٢}]$_{-٢}^{٠}$ + [−$\frac{١}{٢}$ س^{٤} + ٤ س^{٢}]$_{٠}^{٢}$

= ٨ + ٨ = ١٦ وحدة مربعة.

(١٧)

لحل المعادلتين معًا نضع

جا س = جتا س ∴ ظا س = ١

∴ س = $\frac{\pi}{٤}$ = ٤٥°

المساحة = $\int_{صفر}^{\frac{\pi}{٤}}$ (جتا س − جا س) ء س

= [(جا س + جتا س)]$_{٠}^{\frac{\pi}{٤}}$

= ($\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + $\frac{١}{\sqrt{٢}}$) − (٠ + ١)

= $\sqrt{٢}$ − ١ وحدة مربعة.

(١٨)

بحل المعادلتين ∴ س = ± ١

∴ المساحة = $\int_{-١}^{١}$ (س^{٤} + ١) − (٢ س^{٢}) ء س

= $\int_{-١}^{١}$ (س^{٤} − ٢ س^{٢} + ١) ء س

= [$\frac{١}{٥}$ س^{٥} − $\frac{٢}{٣}$ س^{٣} + س]$_{-١}^{١}$ = $\frac{١٦}{١٥}$

(١٩)

* نقط تقاطع المنحنى مع المستقيم نحل المعادلتين

س^{٣} = ٨ ∴ س = ٢

∴ المساحة = $\int_{٠}^{٢}$ (٨ − س^{٣}) ء س

= [٨ س − $\frac{١}{٤}$ س^{٤}]$_{٠}^{٢}$ = ١٢

(٢٠)

المساحة = $\int_{-١}^{٠}$ (س^{٣} − س) ء س

+ |$\int_{٠}^{١}$ (س^{٣} − س) ء س|

= [$\frac{١}{٤}$ س^{٤} − $\frac{١}{٢}$ س^{٢}]$_{-١}^{٠}$

+ |[$\frac{١}{٤}$ س^{٤} − $\frac{١}{٢}$ س^{٢}]$_{٠}^{١}$|

= $\frac{١}{٤}$ + $\frac{١}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$

٥

(١) $\int_{٠}^{٢}$ $\sqrt{٤ - س^{٢}}$ ء س

∴ ص = $\sqrt{٤ - س^{٢}}$

∴ ص^{٢} = ٤ − س^{٢}

∴ س^{٢} + ص^{٢} = ٤

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٢

∴ المساحة = $\frac{١}{٤}$ (π (٢)^{٢}) = π وحدة مربعة.

(٢)

$\int_{-٣}^{٣}$ $\sqrt{٩ - س^{٢}}$ ء س ∴ ص = $\sqrt{٩ - س^{٢}}$

منها س^{٢} + ص^{٢} = ٩

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٣ وحدات

∴ المساحة = $\frac{١}{٢}$ (π (٣)^{٢}) = $\frac{٩}{٢}$ π وحدة مربعة.

(٣)

$\int_{٠}^{٧}$ $\sqrt{٤٩ - س^{٢}}$ ء س ∴ ص = $\sqrt{٤٩ - س^{٢}}$

منها س^{٢} + ص^{٢} = ٤٩

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٧ وحدات

∴ المساحة = $\frac{١}{٤}$ (π (٧)^{٢}) = $\frac{٤٩}{٤}$ π وحدة مربعة.

(٤)

$\int_{-٥}^{٥}$ $\sqrt{٢٥ - س^{٢}}$ ء س ∴ ص = $\sqrt{٢٥ - س^{٢}}$

منها س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٥ وحدات

∴ المساحة = $\frac{١}{٢}$ (π (٥)^{٢}) = $\frac{٢٥}{٢}$ π وحدة مربعة.

(٥)

$\int_{٠}^{١}$ $\sqrt{٤ - س^{٢}}$ ء س

ص = $\sqrt{٤ - س^{٢}}$ منها س^{٢} + ص^{٢} = ٤

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٢

∴ المساحة المطلوبة عبارة عن

Δ ب و جـ + القطاع و أ ب

∵ جـ و = $\frac{١}{٢}$ و ب ∴ ق (∠ جـ ب و) = ٣٠°

ومنها ق (∠ أ و ب) = ٣٠°

∴ المساحة المطلوبة

= $\frac{١}{٢}$ القاعدة × الارتفاع + $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} × هـ

= $\frac{١}{٢}$ × ١ × $\sqrt{٣}$ + $\frac{١}{٢}$ (٢)^{٢} × $\frac{\pi}{٦}$

= ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + $\frac{\pi}{٣}$) وحدة مساحة.

٦

(١) (جـ)	(٢) (د)	(٣) (جـ)	(٤) (ب)	(٥) (جـ)
(٦) (أ)	(٧) (جـ)	(٨) (أ)	(٩) (أ)	(١٠) (جـ)
(١١) (د)	(١٢) (ب)	(١٣) (جـ)	(١٤) (ب)	(١٥) (جـ)
(١٦) (جـ)	(١٧) (ب)	(١٨) (د)	(١٩) (ب)	(٢٠) (د)
(٢١) (ب)	(٢٢) (د)	(٢٣) (ب)	(٢٤) (ب)	(٢٥) (جـ)
(٢٦) (د)	(٢٧) (جـ)	(٢٨) (ب)	(٢٩) (جـ)	(٣٠) (جـ)
(٣١) (ب)				

٧

المساحة = $\int_{٢}^{٤}$ (س − ٢)^{٣} ء س

= [$\frac{١}{٤}$ (س − ٢)^{٤}]$_{٢}^{٤}$ = ٤ وحدات مربعة.

٨

مساحة مدخل الفندق

= $\int_{١}^{٧}$ −$\frac{١}{٢}$ (س − ١) (س − ٧) ء س

= −$\frac{١}{٢}$ $\int_{١}^{٧}$ (س^{٢} − ٨ س + ٧) ء س

= −$\frac{١}{٢}$ [$\frac{١}{٣}$ س^{٣} − ٤ س^{٢} + ٧ س]$_{١}^{٧}$ = ١٨ متر مربع

∴ تكلفة المدخل = ١٨ × ١٥٠٠ = ٢٧٠٠٠ جنيهًا.

٩

مساحة الممر الواحد = $\int_{٠}^{٦}$ (١٢ − $\frac{١}{٣}$ س^{٢}) ء س

= [١٢ س − $\frac{١}{٩}$ س^{٣}]$_{٠}^{٦}$ = ٤٨ متر مربع

∴ تكلفة الخمس ممرات = ٥ × ٤٠٠ × ٤٨

= ٩٦٠٠٠ جنيهًا

١٠

المساحة = $\int_{-٢}^{٢}$ ٢ س^{٢} − (س^{٤} − ٢ س^{٢}) ء س

= $\int_{-٢}^{٢}$ (−س^{٤} + ٤ س^{٢}) ء س

= [−$\frac{١}{٥}$ س^{٥} + $\frac{٤}{٣}$ س^{٣}]$_{-٢}^{٢}$ = $\frac{١٢٨}{١٥}$ ديسم^{٢}

∴ المساحة اللازمة من الورق اللاصق لإنتاج

١٠٠٠ ملصق = ١٠٠٠ × $\frac{١٢٨}{١٥}$ = $\frac{٢٥٦٠٠}{٣}$ ديسم^{٢}

١١

المساحة = $\int_{٠}^{٤}$ $\frac{٤ س}{س^{٢} + ١}$ ء س = ٢ $\int_{٠}^{٤}$ $\frac{٢ س}{س^{٢} + ١}$ ء س

= ٢ [لو$_{هـ}$ (س^{٢} + ١)]$_{٠}^{٤}$

= ٢ لو$_{هـ}$ ١٧ وحدة مربعة.

١٢

المساحة = $\int_{٠}^{٢}$ (س^{٣} − ٦ س^{٢} + ٨ س) ء س

+ |$\int_{٢}^{٤}$ (س^{٣} − ٦ س^{٢} + ٨ س) ء س|

= [$\frac{١}{٤}$ س^{٤} − ٢ س^{٣} + ٤ س^{٢}]$_{٠}^{٢}$

+ |[$\frac{١}{٤}$ س^{٤} − ٢ س^{٣} + ٤ س^{٢}]$_{٢}^{٤}$|

= ٤ + ٤ = ٨ وحدة مربعة.

١٣

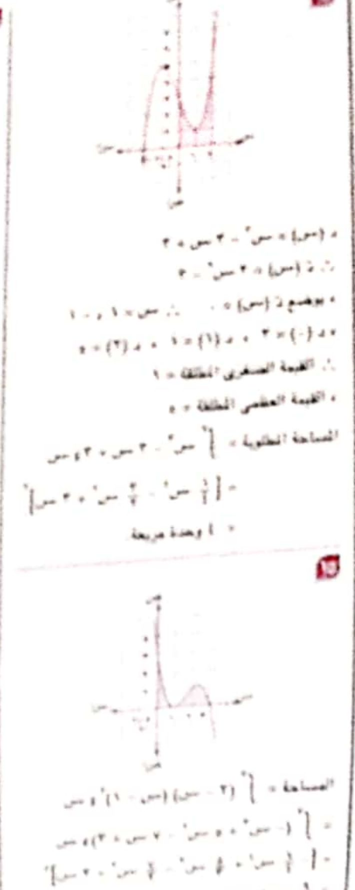
المساحة = $\int_{-٢}^{٠}$ (س^{٣} − ٤ س) ء س

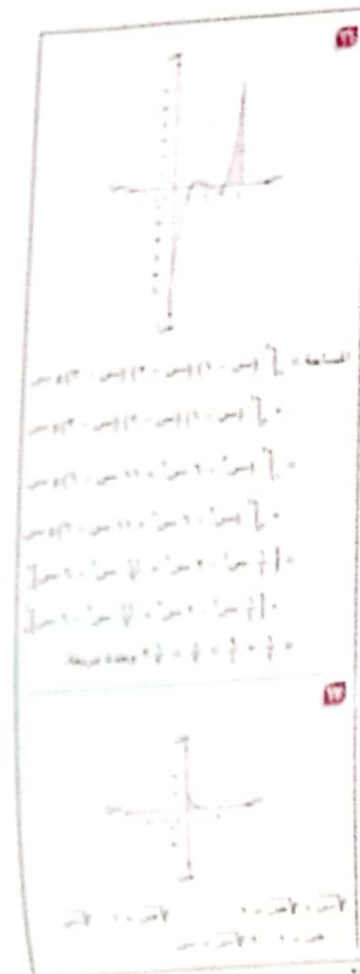
+ $\int_{٠}^{٣}$ (س^{٣} − ٤ س) ء س

= [$\frac{١}{٤}$ س^{٤} − ٢ س^{٢}]$_{-٢}^{٠}$

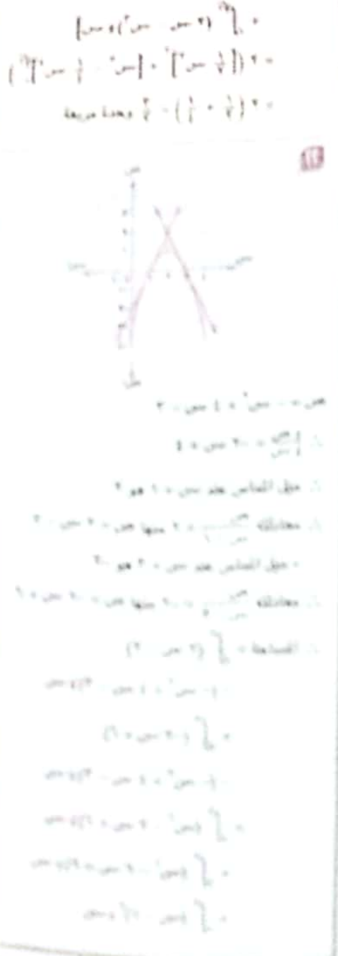
+ [$\frac{١}{٤}$ س^{٤} − ٢ س^{٢}]$_{٠}^{٣}$

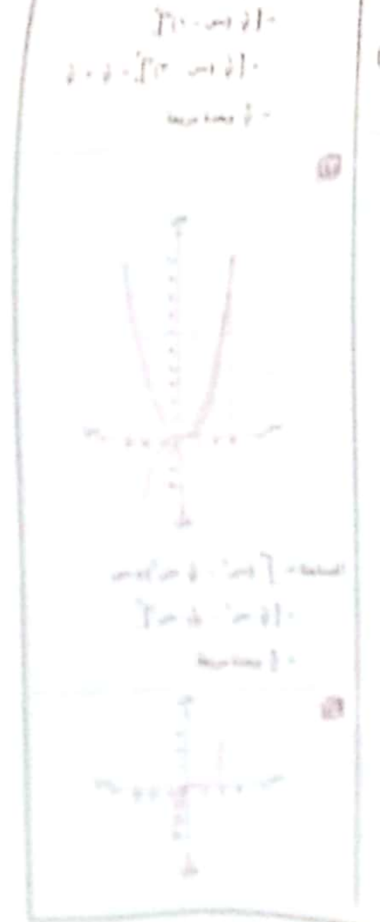
= ٤ + $\frac{٩}{٤}$ = [illegible] وحدة مربعة.













∴ المساحة = $\int_{0}^{12}$ ص ء س

= $\frac{1}{12}\int_{0}^{12}$ س^2 ء س = $\frac{1}{12}\left[\frac{1}{3}\right.$ س$^3\left.\right]_{0}^{12}$

= $\frac{1}{36}\times(12)^3 = 48$ وحدة مربعة

حل آخر :

∵ المساحة = $\int_{0}^{12}$ ص ء س

، عند س = ٠ فإن ن = ٠

، عند س = ١٢ فإن ن = ٢

∴ المساحة = $\int_{0}^{2}$ ص $\frac{\text{ء س}}{\text{ء ن}}$ ء ن

= $\int_{0}^{2}$ (٣ ن^2 × ٦) ء ن

= ١٨ $\int_{0}^{2}$ ن^2 ء ن

= ١٨ × $\left[\frac{1}{3}\right.$ ن$^3\left.\right]_{0}^{2}$ = ٤٨ وحدة مربعة

(٦) ∵ م$_3$ = $\int_{0}^{4}\frac{1}{4}$ س^2 ء س = $\frac{16}{3}$ وحدة مربعة

∴ م$_2$ = $\int_{0}^{4}$ (٢ $\sqrt{\text{س}}$ − $\frac{1}{4}$ س^2) ء س

= $\frac{16}{3}$ وحدة مربعة

، ∵ مساحة المربع = ٤ × ٤ = ١٦ وحدة مربعة

∴ م$_1$ = ١٦ − ($\frac{16}{3}+\frac{16}{3}$) = $\frac{16}{3}$ وحدة مربعة

∴ م$_1$: م$_2$: م$_3$ = $\frac{16}{3}$: $\frac{16}{3}$: $\frac{16}{3}$

= ١ : ١ : ١

(٧) لإيجاد نقط التقاطع نضع جا س = جا ٢ س

∴ ٢ جا س جتا س − جا س = ٠

∴ جا س (٢ جتا س − ١) = ٠

∴ جا س = ٠ ومنها س = ٠ أو س = π

أو ٢ جتا س − ١ = ٠

∴ جتا س = $\frac{1}{2}$ ومنها س = $\frac{\pi}{3}$

∴ م$_1$ = $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}$ (جا ٢ س − جا س) ء س

= $\left[-\frac{1}{2}\right.$ جتا ٢ س + جتا س$\left.\right]_{0}^{\frac{\pi}{3}}$ = $\frac{1}{4}$

، م$_2$ = $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$ (جا س − جا ٢ س) ء س

= [− جتا س + $\frac{1}{2}$ جتا ٢ س$]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$ = $\frac{9}{4}$

∴ م$_1$: م$_2$ = ١ : ٩

(٨)

نفرض أن د(ل) = ٦ ل^2

∴ المساحة (م) = $\int_{1}^{ل}$ (٦ ل^2 − ٦ س^2) ء س

+ $\int_{ل}^{3}$ (٦ س^2 − ٦ ل^2) ء س

= [٦ ل^2 س − ٢ س^3$]_{1}^{ل}$

+ [٢ س^3 − ٦ ل^2 س$]_{ل}^{3}$

= (٦ ل^3 − ٢ ل^3) − (٦ ل^2 − ٢)

+ (٥٤ − ١٨ ل^2) − (٢ ل^3 − ٦ ل^3)

= (٤ ل^3 − ٦ ل^2 + ٢) + (٥٤ − ١٨ ل^2 + ٤ ل^3)

= ٨ ل^3 − ٢٤ ل^2 + ٥٦

∴ $\frac{\text{ء م}}{\text{ء ل}}$ = ٢٤ ل^2 − ٤٨ ل

وبوضع $\frac{\text{ء م}}{\text{ء ل}}$ = صفر ∴ ل = ٢

، ∵ $\left(\frac{\text{ء}^2\text{م}}{\text{ء ل}^2}\right)_{ل=2}$ = (٤٨ ل − ٤٨)$_{ل=2}$ > صفر

∴ عند ل = ٢ تكون المساحة أصغر ما يمكن.

(٩) ∵ مساحة شبه المنحرف

أ ب حـ ء

= $\frac{1}{2}$ (٢ + ٦) × ٤

= ١٦ وحدة مربعة

، ∵ م$_1$ = ١٣ وحدة مربعة

∴ م$_2$ = ١٦ − ١٣ = ٣ وحدة مربعة

، ∵ منحنى د$^{-1}$(س) هو منحنى د(س)

بالانعكاس حول المستقيم ص = س

∴ م$_3$ = م$_2$ = ٣ وحدة مربعة

∴ $\int_{2}^{6}$ د$^{-1}$(س) ء س = م$_1$ + م$_2$ + م$_3$

= ١٣ + ٣ + ٣ = ١٩ وحدة مربعة

(١٠) ∵ $\frac{\text{م}_1+\text{م}_2}{\text{م}_1}$ = $\frac{8}{1}$

∴ $\frac{\int_{0}^{ن}(\text{ن س} - \text{س}^2)\,\text{ء س}}{\int_{0}^{ل}(\text{ل س} - \text{س}^2)\,\text{ء س}}$ = $\frac{8}{1}$

∴ $\frac{\left[\frac{\text{ن س}^2}{2}-\frac{\text{س}^3}{3}\right]_{0}^{ن}}{\left[\frac{\text{ل س}^2}{2}-\frac{\text{س}^3}{3}\right]_{0}^{ل}}$ = ٨

∴ $\frac{\text{ن}^3}{\text{ل}^3}$ = ٨ ∴ $\frac{\text{ن}}{\text{ل}}$ = ٢

(١١) نفرض دَ(س) = ٠ عند س = حـ ∈ [٠ ، ٦]

∴ $\int_{0}^{حـ}$ دَ(س) ء س = ٢٠

∴ [د(س)$]_{0}^{حـ}$ = ٢٠ ∴ د(حـ) − د(٠) = ٢٠

، ∵ د(٠) = ٢ ∴ د(حـ) = ٢٢

، ∵ $\int_{حـ}^{6}$ دَ(س) ء س = ٢٠ − ٧ = ١٣

∴ [د(س)$]_{0}^{6}$ = ١٣ ∴ د(٦) − د(٠) = ١٣

∴ د(٦) = ١٥

∴ د(٠) = ٢ ، د(حـ) = ٢٢ ، د(٦) = ١٥

∴ أكبر قيمة للدالة د في الفترة [٠ ، ٦] = ٢٢

(١٢) نفرض أى شكل للمنحنى

د(س) كما بالشكل المقابل

∴ $\int_{1}^{4}$ د(س) ء س

= المساحة تحت المنحنى

وهى محصورة بين

مساحتى المستطيلين

أ ب حـ ء ، أ ب هـ و

∴ ٥ × (٤ − ١) < $\int_{1}^{4}$ د(س) ء س < ٨ × (٤ − ١)

∴ ١٥ < $\int_{1}^{4}$ د(س) ء س < ٢٤

∴ $\int_{1}^{4}$ د(س) ء س ∈]١٥ ، ٢٤[

(١٣) نفرض النقطة أ (س ، ص)

∴ مساحة المستطيل (م)

= ٢ س × ص

= ٢ س (١٢ − س^2)

= ٢٤ س − ٢ س^3

∴ $\frac{\text{ء م}}{\text{ء س}}$

= ٢٤ − ٦ س^2

وبوضع $\frac{\text{ء م}}{\text{ء س}}$ = ٠

∴ س^2 = ٤ ∴ س = ± ٢

، ∵ $\frac{\text{ء}^2\text{م}}{\text{ء س}^2}$ = −١٢ س

∴ $\frac{\text{ء}^2\text{م}}{\text{ء س}^2}$ < ٠ عند س = ٢

∴ مساحة المستطيل أكبر ما يمكن عند س = ٢

ومنها ص = ٨

∴ مساحة الجزء المظلل

= $\int_{-2}^{2}$ (١٢ − س^2 − ٨) ء س

= $\int_{-2}^{2}$ (٤ − س^2) ء س

= [٤ س − $\frac{1}{3}$ س^3$]_{-2}^{2}$ = $\frac{32}{3}$ وحدة مربعة

1

(١)

الحجم = $\pi\int_{0}^{3}$ (ص)^2 ء س = $\pi\int_{0}^{3}$ س^2 ء س

= $\pi\left[\frac{1}{3}\right.$ س$^3\left.\right]_{0}^{3}$ = ٩ π وحدة حجوم.

(٢)

الحجم = $\pi\int_{0}^{4}$ ص^2 ء س

= $\pi\int_{0}^{4}$ (٢ س + ١)^2 ء س

= $\pi\left[\frac{1}{6}\right.$ (٢ س + ١)$^3\left.\right]_{0}^{4}$

= $\frac{364}{3}\pi$ وحدة حجوم

(٣)

الحجم = $\pi\int_{0}^{3}$ ص^2 ء س

= $\pi\int_{0}^{3}$ (٣ − س)^2 ء س

= $\pi\left[\frac{-1}{3}\right.$ (٣ − س)$^3\left.\right]_{0}^{3}$

= ٩ π وحدة حجوم.

(٤)

الحجم = $\pi\int_{1}^{5}$ ص^2 ء س = $\pi\int_{1}^{5}$ (س^2)^2 ء س

= $\pi\int_{1}^{5}$ س^4 ء س = $\pi\left[\frac{1}{5}\right.$ س$^5\left.\right]_{1}^{5}$

= $\frac{4}{5}$ ٦٢٤ π وحدة حجوم

(٥)

الحجم = $\pi\int_{-1}^{1}$ ص^2 ء س

= $\pi\int_{-1}^{1}$ (س^2 + ١)^2 ء س

= $\pi\int_{-1}^{1}$ (س^4 + ٢ س^2 + ١) ء س

= $\pi\left[\frac{1}{5}\right.$ س^5 + $\frac{2}{3}$ س^3 + س$\left.\right]_{-1}^{1}$

= $\frac{56}{15}\pi$ وحدة حجوم

(٦)

الحجم = $\pi\int_{1}^{4}$ ص^2 ء س = $\pi\int_{1}^{4}$ (٢ $\sqrt{\text{س}}$)^2 ء س

= $\pi\int_{1}^{4}$ س ء س = $\pi\left[\frac{1}{2}\right.$ س$^2\left.\right]_{1}^{4}$

= $\frac{1}{2}$ ٧ π وحدة حجوم.

(٧)

الحجم = $\pi\int_{1}^{3}$ ص^2 ء س = $\pi\int_{1}^{3}$ (س + ٥) ء س

= $\left[\frac{1}{2}\right.$ س^2 + ٥ س$\left.\right]_{1}^{3}$ = ١٤ π وحدة حجوم.

(٨)

الحجم = $\pi\int_{0}^{1}$ ص^2 ء س

= $\pi\int_{0}^{1}$ (س^3 + ١)^2 ء س

= $\pi\int_{0}^{1}$ (س^6 + ٢ س^3 + ١) ء س

= $\pi\left[\frac{1}{7}\right.$ س^7 + $\frac{1}{2}$ س^4 + س$\left.\right]_{0}^{1}$

= $\frac{23}{14}\pi$ وحدة حجوم.

(٩)

الحجم = $\pi\int_{1}^{4}$ ص^2 ء س = $\pi\int_{1}^{4}$ ($\frac{1}{\text{س}}$)^2 ء س

= $\pi\int_{1}^{4}$ س$^{-2}$ ء س = π × [− س$^{-1}$$]_{1}^{4}$

= $\frac{3}{4}\pi$ وحدة حجوم.

(١٠)

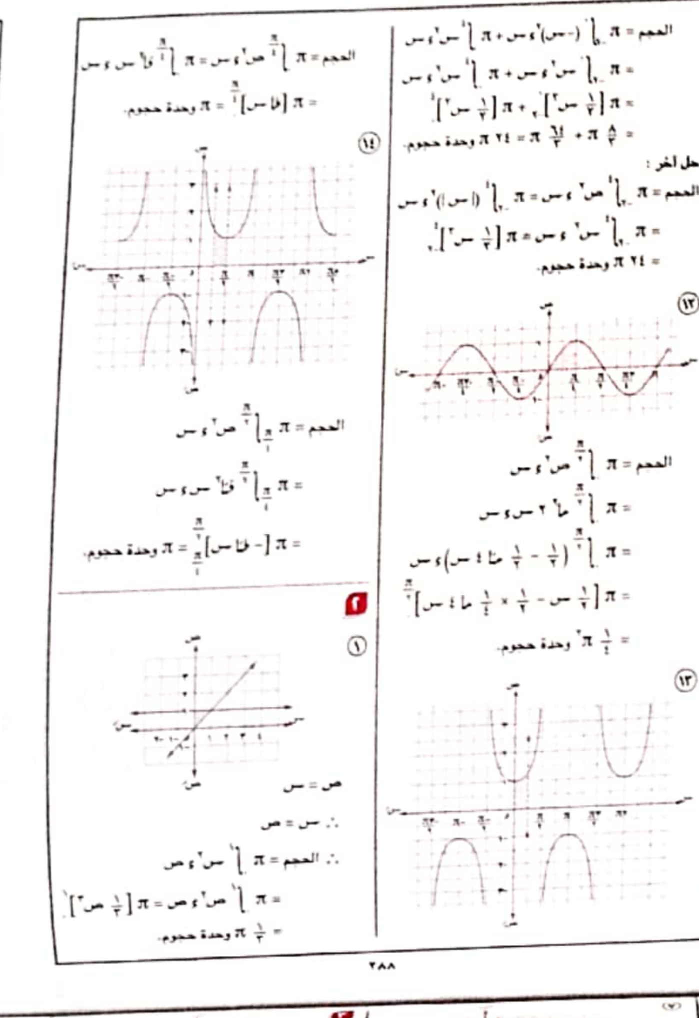
الحجم = $\pi\int_{0}^{1}$ ص^2 ء س = $\pi\int_{0}^{1}$ هـ$^{2\text{س}}$ ء س

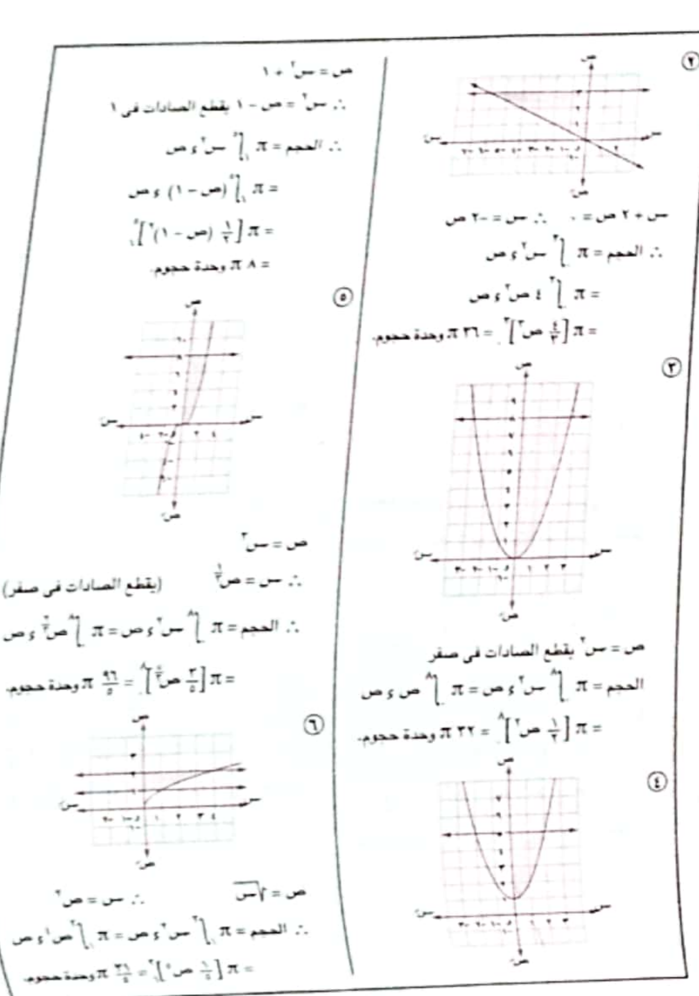
= $\pi\left[\frac{\text{هـ}^{2\text{س}}}{2}\right]_{0}^{1}$

= $\frac{\pi}{2}$ (هـ^2 − ١) وحدة حجوم.

(١١)

ص = |س| = { س ، س ≥ صفر ؛ −س ، س < ٠ }





(٧)

$\text{س ص} = 4 \quad \therefore \text{س} = \frac{4}{\text{ص}}$

$\therefore \text{الحجم} = \pi \int_{1}^{4} \text{س}^2 \, \text{ء ص} = \pi \int_{1}^{4} \frac{16}{\text{ص}^2} \, \text{ء ص}$

$= \pi \int_{1}^{4} 16 \, \text{ص}^{-2} \, \text{ء ص}$

$= \pi \left[-16 \, \text{ص}^{-1}\right]_{1}^{4}$

$= 12\pi$ وحدة حجوم.

(٨) $\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{ص}} = 1 \quad \therefore \sqrt{\text{س}} = 1 - \sqrt{\text{ص}}$

$\therefore \text{س} = (1 - \sqrt{\text{ص}})^2$ يقطع الصادات في ١

$\therefore \text{الحجم} = \pi \int_{0}^{1} \text{س}^2 \, \text{ء ص}$

$= \pi \int_{0}^{1} (1 - \sqrt{\text{ص}})^4 \, \text{ء ص}$ (١)

بوضع $1 - \sqrt{\text{ص}} = \text{ع} \quad \therefore \sqrt{\text{ص}} = 1 - \text{ع}$

$\therefore \text{ص} = (1 - \text{ع})^2$

$\therefore \text{ء ص} = -2(1 - \text{ع}) \, \text{ء ع}$ (٢)

، ص = ٠ فإن ع = ١ ، ص = ١ فإن ع = صفر

$\therefore \text{الحجم} = \pi \int_{1}^{0} \text{ع}^4 \times -2(1 - \text{ع}) \, \text{ء ع}$

$= \pi \int_{1}^{0} (-2\text{ع}^4 + 2\text{ع}^5) \, \text{ء ع}$

$= \pi \left[-\frac{2}{5}\text{ع}^5 + \frac{1}{3}\text{ع}^6\right]_{1}^{0}$

$= \frac{1}{15}\pi$ وحدة حجوم.

٣

بدوران المنطقة المستوية المحصورة بين س = ٠ ، س = ٣ ، د (س) = س حول محور السينات ينتج مخروط دائرى قائم طول نصف قطر قاعدته ٣ وحدات طول وارتفاعه ٣ وحدات طول.

$\therefore \text{حجمه بالتكامل} = \pi \int_{0}^{3} \text{ص}^2 \, \text{ء س}$

$= \pi \int_{0}^{3} \text{س}^2 \, \text{ء س}$

$= \pi \times \left[\frac{1}{3}\text{س}^3\right]_{0}^{3}$

$= 9\pi$ وحدة حجوم.

، الحجم بواسطة قانون حجم المخروط

$= \frac{1}{3}\pi (3)^2 \times 3 = 9\pi$ وحدة حجوم.

٤

(١) حول محور الصادات

$\text{الحجم} = \pi \int_{0}^{1} \text{س}^2 \, \text{ء ص} = \pi \int_{0}^{1} 4\text{ص} \, \text{ء ص}$

$= \pi \left[2\text{ص}^2\right]_{0}^{1} = 2\pi$ وحدة حجوم

(٢) حول محور السينات عند ص = ١ فإن س = ٢

$\therefore \text{الحجم} = \pi \int_{0}^{2} (1^2 - \text{ص}^2) \, \text{ء س}$

$= \pi \int_{0}^{2} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\text{س}^2\right)^2\right) \text{ء س}$

$= \pi \int_{0}^{2} \left(1 - \frac{1}{16}\text{س}^4\right) \text{ء س}$

$= \pi \left[\text{س} - \frac{1}{80}\text{س}^5\right]_{0}^{2}$

$= \frac{8}{5}\pi$ وحدة حجوم

٥

(١) حول محور السينات

$\therefore \text{ص} = \text{س}^2$ يقطع محور السينات في صفر

$\therefore \text{الحجم} = \pi \int_{0}^{2} \text{ص}^2 \, \text{ء س} = \pi \int_{0}^{2} \text{س}^4 \, \text{ء س}$

$= \pi \left[\frac{1}{5}\text{س}^5\right]_{0}^{2} = \frac{32}{5}\pi$ وحدة حجوم

(٢) حول محور الصادات

عند س = ٢ فإن ص = ٤

$\therefore \text{الحجم} = \pi \int_{0}^{4} (4 - \text{س}^2) \, \text{ء ص}$

$= \pi \int_{0}^{4} (4 - \text{ص}) \, \text{ء ص}$

$= \pi \left[4\text{ص} - \frac{1}{2}\text{ص}^2\right]_{0}^{4}$

$= 8\pi$ وحدة حجوم

٦

$\text{ص} = \sqrt{4 - \text{س}}$ منها $\text{س} = 4 - \text{ص}^2$

(١) حول محور السينات

$\therefore \text{الحجم} = \pi \int_{0}^{4} \text{ص}^2 \, \text{ء س} = \pi \int_{0}^{4} (4 - \text{س}) \, \text{ء س}$

$= \pi \left[4\text{س} - \frac{1}{2}\text{س}^2\right]_{0}^{4} = 8\pi$ وحدة حجوم

(٢) حول محور الصادات

$\therefore \text{الحجم} = \pi \int_{0}^{2} \text{س}^2 \, \text{ء ص}$

$= \pi \int_{0}^{2} (4 - \text{ص}^2)^2 \, \text{ء ص}$

$= \pi \int_{0}^{2} (16 - 8\text{ص}^2 + \text{ص}^4) \, \text{ء ص}$

$= \pi \left[16\text{ص} - \frac{8}{3}\text{ص}^3 + \frac{1}{5}\text{ص}^5\right]_{0}^{2}$

$= \frac{256}{15}\pi$ وحدة حجوم.

٧

$\text{ص} = 4 - \text{س}^2$ منها $\text{س}^2 = 4 - \text{ص}$

(١) حول محور السينات

$\therefore \text{الحجم} = \pi \int_{0}^{2} \text{ص}^2 \, \text{ء س}$

$= \pi \int_{0}^{2} (4 - \text{س}^2)^2 \, \text{ء س}$

$= \pi \int_{0}^{2} (16 - 8\text{س}^2 + \text{س}^4) \, \text{ء س}$

$= \pi \left[16\text{س} - \frac{8}{3}\text{س}^3 + \frac{1}{5}\text{س}^5\right]_{0}^{2}$

$= \frac{256}{15}\pi$ وحدة حجوم

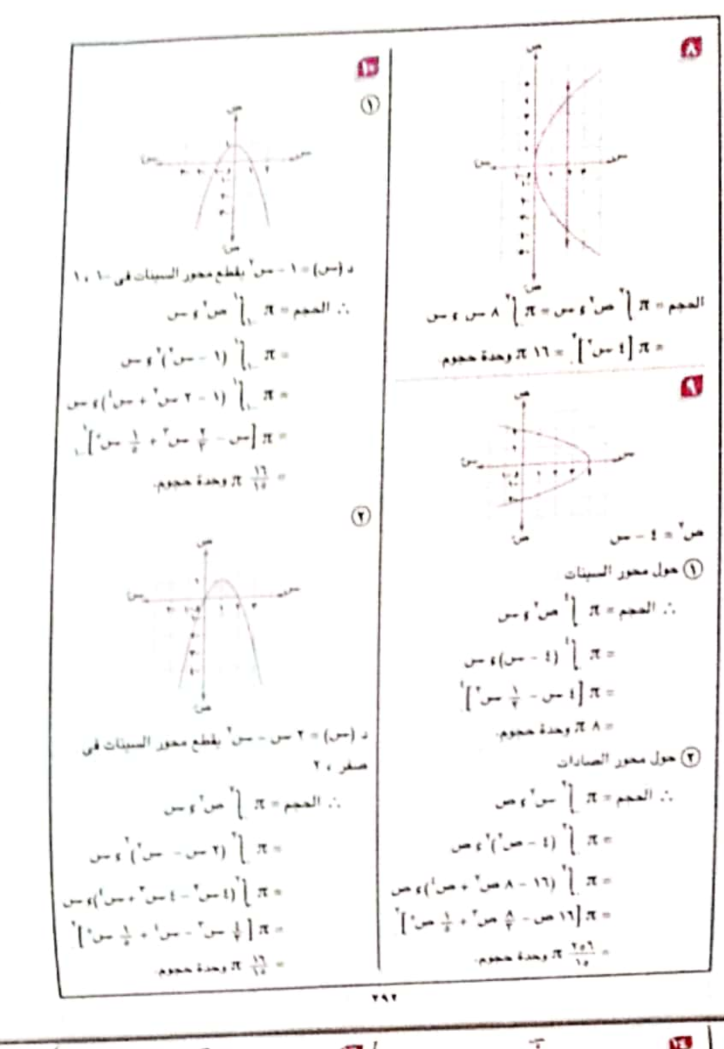
(٢) حول محور الصادات

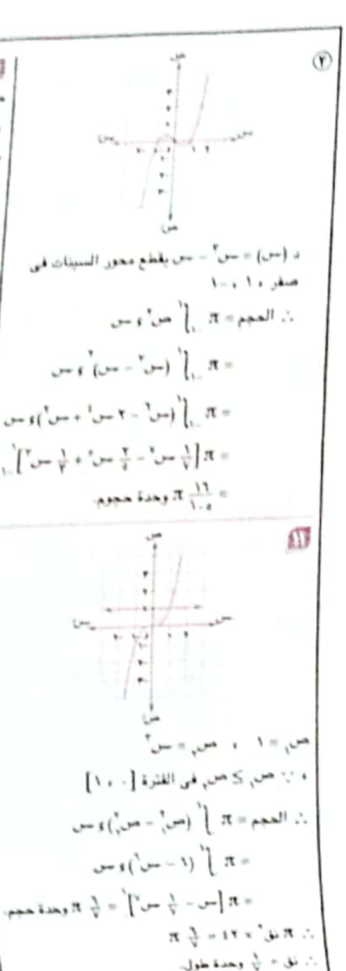
$\therefore \text{الحجم} = \pi \int_{0}^{4} \text{س}^2 \, \text{ء ص}$

$= \pi \int_{0}^{4} (4 - \text{ص}) \, \text{ء ص}$

$= \pi \left[4\text{ص} - \frac{1}{2}\text{ص}^2\right]_{0}^{4}$

$= 8\pi$ وحدة حجوم





١٢

ص₁ = ٥ س − س²

، ص₂ = ٤

يتقاطعا في س = ١

، س = ٤

، ∵ ص₂ ≤ ص₁

في الفترة [١ ، ٤]

∴ الحجم = $\pi \int_{1}^{4} (ص_1^2 - ص_2^2)$ ء س

= $\pi \int_{1}^{4} ((٥ س - س^2)^2 - ٤^2)$ ء س

= $\pi \int_{1}^{4} (٢٥ س^2 - ١٠ س^3$

$+ س^4 - ١٦)$ ء س

= $\pi \left[\frac{٢٥}{٣} س^3 - \frac{٥}{٢} س^4 + \frac{١}{٥} س^5 \right.$

$\left. - ١٦ س \right]_{1}^{4}$

= ٤٤٫١ π وحدة حجوم.

١٣

ص₁ = $\frac{١}{٢}$ + س² ، ص₂ = س

، ∵ ص₂ ≤ ص₁ في الفترة [٠ ، ٢]

∴ الحجم = $\pi \int_{0}^{2} (ص_1^2 - ص_2^2)$ ء س

= $\pi \int_{0}^{2} ((\frac{١}{٢} + س^2)^2 - س^2)$ ء س

= $\pi \int_{0}^{2} (\frac{١}{٤} + س^2 + س^4 - س^2)$ ء س

= $\pi \left[\frac{١}{٤} س + \frac{١}{٥} س^5 \right]_{0}^{2}$

= ٦٫٩ π وحدة حجوم.

١٤

ص₁ = س² ، ص₂ = ٢ س

يتقاطعا عند س = ٠ ، س = ٢

، في هذه الفترة ص₁ ≤ ص₂

∴ الحجم = $\pi \int_{0}^{2} (ص_2^2 - ص_1^2)$ ء س

= $\pi \int_{0}^{2} ((٢ س)^2 - (س^2)^2)$ ء س

= $\pi \int_{0}^{2} (٤ س^2 - س^4)$ ء س

= $\pi \left[\frac{٤}{٣} س^3 - \frac{١}{٥} س^5 \right]_{0}^{2}$

= $\frac{٦٤}{١٥} \pi$ وحدة حجوم.

١٥

ص₁ = $\sqrt{س}$ ، ص₂ = س²

يتقاطعا عند س = ٠ ، س = ١

، ∵ ص₂ ≤ ص₁ في هذه الفترة

∴ الحجم = $\pi \int_{0}^{1} (ص_1^2 - ص_2^2)$ ء س

= $\pi \int_{0}^{1} (س - س^4)$ ء س

= $\pi \left[\frac{١}{٢} س^2 - \frac{١}{٥} س^5 \right]_{0}^{1}$

= $\frac{٣}{١٠} \pi$ وحدة حجوم.

١٦

ص₁² = ٨ س ، ص₂ = س²

يتقاطعا عند س = ٠ ، س = ٢

، ∵ ص₂ ≤ ص₁ في هذه الفترة

∴ الحجم = $\pi \int_{0}^{2} (ص_1^2 - ص_2^2)$ ء س

= $\pi \int_{0}^{2} (٨ س - (س^2)^2)$ ء س

= $\pi \int_{0}^{2} ((٨ س - س^4))$ ء س

= $\pi \left[٤ س^2 - \frac{١}{٥} س^5 \right]_{0}^{2}$

= $\frac{٤٨}{٥} \pi$ وحدة حجوم.

١٧

ص = ٤ − س² ∴ س₁² = ٤ − ص

، ٢ س + ص = ٤ ∴ س₂ = ٢ − $\frac{١}{٢}$ ص

يتقاطعان عند ص = ٠ ، ص = ٤

ويكون س₂ ≤ س₁ في الفترة [٠ ، ٤]

∴ الحجم = $\pi \int_{0}^{4} (س_1^2 - س_2^2)$ ء ص

= $\pi \int_{0}^{4} ((٤ - ص) - (٢ - \frac{١}{٢} ص)^2)$ ء ص

$(\frac{١}{٤} ص^2)$ ء ص

= $\pi \int_{0}^{4} (ص - \frac{١}{٤} ص^2)$ ء ص

= $\pi \left[\frac{١}{٢} ص^2 - \frac{١}{١٢} ص^3 \right]_{0}^{4}$

= $\frac{٨}{٣} \pi$ وحدة حجوم.

١٨

س₁² = ٢ ص ، س₂ = ص²

يتقاطعا في ص = ٠ ، ص = $\sqrt[3]{٢}$

وفي هذه الفترة س₂ ≤ س₁

الحجم = $\pi \int_{0}^{\sqrt[3]{2}} (س_1^2 - س_2^2)$ ء ص

= $\pi \int_{0}^{\sqrt[3]{2}} (٢ ص - ص^4)$ ء ص

= $\pi \left[ص^2 - \frac{١}{٥} ص^5 \right]_{0}^{\sqrt[3]{2}}$ = ٠٫٩٥ π وحدة حجوم

١٩

ص₁ = ٥ س − س² ، ص₂ = س

يتقاطعا عند س = ٠ ، س = ٤

وفي هذه الفترة ص₂ ≤ ص₁

= $\pi \int_{0}^{4} ((٥ س - س^2)^2 - س^2)$ ء س

= $\pi \int_{0}^{4} (٢٥ س^2 - ١٠ س^3 + س^4$

$- س^2)$ ء س

= $\pi \int_{0}^{4} (٢٤ س^2 - ١٠ س^3 + س^4)$ ء س

= $\pi \left[٨ س^3 - \frac{٥}{٢} س^4 + \frac{١}{٥} س^5 \right]_{0}^{4}$

= $\frac{٣٨٤}{٥} \pi$ = ٧٦٫٨ π وحدة حجوم.

٢٠

ص₁ = $\frac{٤}{س}$ ، ص₂ = ٥ − س

يتقاطعا عند س = ١ ، س = ٤

ويكون ص₁ ≥ ص₂ في هذه الفترة

∴ الحجم = $\pi \int_{1}^{4} (ص_2^2 - ص_1^2)$ ء س

= $\pi \int_{1}^{4} ((٥ - س)^2 - (\frac{٤}{س})^2)$ ء س

= $\pi \int_{1}^{4} (٢٥ - ١٠ س + س^2 - \frac{١٦}{س^2})$ ء س

= $\pi [٢٥ س - ٥ س^2 + \frac{١}{٣} س^3$

$+ ١٦ س^{-1}]_{1}^{4}$ = ٩ π وحدة حجوم.

∴ الحجم = $\pi \int$ ...

$= 2\pi \int$ ... ء س

$= 2\pi \int (16 - س^2)$ ء س

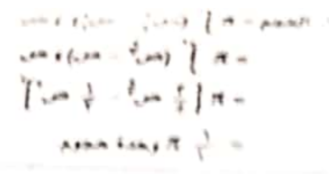
$= 2\pi \left[16 س - \frac{1}{3} س^3 \right]$

$= \frac{256}{3}\pi$ وحدة حجوم

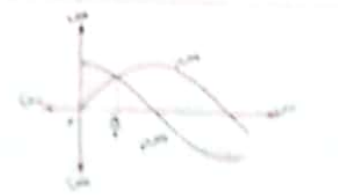


∴ الشكل متماثل حول محور الصادات

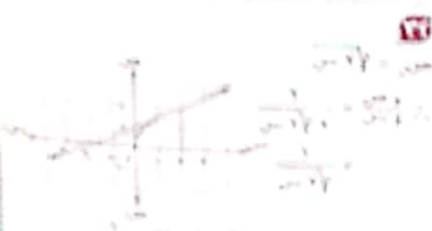




$= \frac{1}{3}\pi$ وحدة حجوم



① (ب)	② (جـ)	③ (جـ)	④ (د)	⑤ (أ)
⑥ (جـ)	⑦ (جـ)	⑧ (ب)	⑨ (أ)	⑩ (جـ)
⑪ (د)	⑫ (أ)	⑬ (أ)	⑭ (أ)	⑮ (ب)
⑯ (جـ)	⑰ (د)	⑱ (د)	⑲ (جـ)	⑳ (أ)
㉑ (د)	㉒ (ب)	㉓ (أ)	㉔ (جـ)	㉕ (ب)
㉖ (د)				





$= 24\pi$ وحدة حجوم

٢٥

معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$:

$\frac{\text{ص} - ٥}{\text{س} - ١} = \frac{٠ - ٥}{-٢ - ١} = \frac{٥}{٣}$

$\therefore \text{ص}_١ = \frac{٥}{٣}\text{س} + \frac{١٠}{٣}$

، معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{\text{بحـ}}$

$\frac{\text{ص} - ٥}{\text{س} - ١} = \frac{٠ - ٥}{٤ - ١} = \frac{-٥}{٣}$

$\therefore \text{ص}_٢ = \frac{-٥}{٣}\text{س} + \frac{٢٠}{٣}$

$\therefore \text{الحجم} = \pi \int_{-٢}^{١} (\text{ص}_١)^٢ \, ء\text{س} + \pi \int_{١}^{٤} (\text{ص}_٢)^٢ \, ء\text{س}$

$= \pi \int_{-٢}^{١} \left(\frac{٥}{٣}\text{س} + \frac{١٠}{٣}\right)^٢ ء\text{س}$

$+ \pi \int_{١}^{٤} \left(\frac{-٥}{٣}\text{س} + \frac{٢٠}{٣}\right)^٢ ء\text{س}$

$= \pi \left[\frac{١}{٥}\left(\frac{٥}{٣}\text{س} + \frac{١٠}{٣}\right)^٣\right]_{-٢}^{١}$

$+ \pi \left[-\frac{١}{٥}\left(\frac{-٥}{٣}\text{س} + \frac{٢٠}{٣}\right)^٣\right]_{١}^{٤}$

$= ٢٥\pi + ٢٥\pi = ٥٠\pi$ وحدة حجوم.

٢٦

① معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$:

$\frac{\text{ص} - ٢}{\text{س} - ٠} = \frac{٤ - ٢}{٦ - ٠} = \frac{١}{٣}$

$\therefore \text{ص} = \frac{١}{٣}\text{س} + ٢$

② المنحنى د يقطع المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ عندما

$\frac{٩}{\text{س}} = \frac{١}{٣}\text{س} + ٢ \qquad \therefore ٢٧ = \text{س}^٢ + ٦\text{س}$

$\therefore \text{س}^٢ + ٦\text{س} - ٢٧ = ٠$

$\therefore \text{س} = -٩$ (مرفوض) أو $\text{س} = ٣$

$\therefore \text{ص} = ٣ \qquad \therefore \text{حـ} = (٣ ، ٣)$

③ ميل المماس للمنحنى عند أي نقطة $\frac{ء\text{ص}}{ء\text{س}} = \frac{-٩}{\text{س}^٢}$

$\therefore$ ميل المماس عند حـ $= -١$

$\therefore$ ميل العمودي $= \frac{-١}{-١} = ١$

$\therefore$ معادلة العمودي $\frac{\text{ص} - ٣}{\text{س} - ٣} = ١$

$\therefore \text{س} - \text{ص} = ٠$

$\therefore$ يمر بنقطة الأصل

④

$\text{الحجم} = \pi \int_{٠}^{٣} \text{س}^٢ \, ء\text{س} + \pi \int_{٣}^{٦} \left(\frac{٩}{\text{س}}\right)^٢ ء\text{س}$

$= \pi \left[\frac{١}{٣}\text{س}^٣\right]_{٠}^{٣} + \pi \left[-٨١\text{س}^{-١}\right]_{٣}^{٦}$

$= ٩\pi + \frac{٢٧}{٢}\pi = \frac{٤٥}{٢}\pi$ وحدة حجوم.

٢٧

$\text{الحجم} = \pi \int_{١}^{أ} \text{ص}^٢ \, ء\text{س} = \pi \int_{١}^{أ} \text{س} \, ء\text{س}$

$= \pi \left[\frac{١}{٢}\text{س}^٢\right]_{١}^{أ} = \frac{\pi}{٢}(أ^٢ - ١)$

$\therefore \frac{\pi}{٢}(أ^٢ - ١) = ١٢\pi$

$\therefore أ^٢ - ١ = ٢٤ \qquad \therefore أ^٢ = ٢٥$

$\therefore أ = \pm ٥ \qquad \because أ > ١$

$\therefore أ = ٥$

٢٨

① حول السينات

$\therefore \text{الحجم} = \pi \int_{٢}^{٤} \left(\frac{١}{\text{س} - ١}\right)^٢ ء\text{س}$

$= \pi \int_{٢}^{٤} (\text{س} - ١)^{-٢} ء\text{س}$

$= \pi \left[-(\text{س} - ١)^{-١}\right]_{٢}^{٤}$

$= \frac{٢}{٣}\pi$ وحدة مكعبة.

② حول الصادات عند $\text{س} = ٢ \quad \therefore \text{ص} = ١$

، عند $\text{س} = ٤ \quad \therefore \text{ص} = \frac{١}{٣}$

$\text{س}_١ = ١ + \frac{١}{\text{ص}} \quad ، \quad \text{س}_٢ = ٢ \quad ، \quad \text{س}_٣ = ٤$

$\therefore \text{الحجم} = \pi \int_{٠}^{\frac{١}{٣}} (\text{س}_٣^٢ - \text{س}_٢^٢) \, ء\text{ص}$

$+ \pi \int_{\frac{١}{٣}}^{١} (\text{س}_١^٢ - \text{س}_٢^٢) \, ء\text{ص}$

$= \pi \int_{٠}^{\frac{١}{٣}} (١٦ - ٤) \, ء\text{ص}$

$+ \pi \int_{\frac{١}{٣}}^{١} \left(\left(١ + \frac{١}{\text{ص}}\right)^٢ - ٤\right) ء\text{ص}$

$= \pi \int_{٠}^{\frac{١}{٣}} ١٢ \, ء\text{ص}$

$+ \pi \int_{\frac{١}{٣}}^{١} \left(\frac{٢}{\text{ص}} + \frac{١}{\text{ص}^٢} - ٣\right) ء\text{ص}$

$= \pi \left[١٢\text{ص}\right]_{٠}^{\frac{١}{٣}}$

$+ \pi \left[٢ \text{لو}_{هـ} |\text{ص}| - \frac{١}{\text{ص}} - ٣\text{ص}\right]_{\frac{١}{٣}}^{١}$

$= ٤\pi + ٢\pi \, \text{لو}_{هـ} ٣$

$= ٢\pi(٢ + \text{لو}_{هـ} ٣)$ وحدة حجوم

٢٩

معادلة $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$

$\frac{\text{ص} - ٣}{\text{س} - ٠} = \frac{٥ - ٣}{٢ - ٠}$

$\therefore \frac{\text{ص} - ٣}{\text{س}} = ١ \qquad \therefore \text{ص} = \text{س} + ٣$

$\therefore$ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{\text{بحـ}}$ $\frac{\text{ص} - ٠}{\text{س} - ٧} = \frac{٥ - ٠}{٢ - ٧} = -١$

$\therefore \text{ص} = -\text{س} + ٧$

$\therefore \text{الحجم} = \pi \int_{٠}^{٢} (\text{س} + ٣)^٢ \, ء\text{س}$

$+ \pi \int_{٢}^{٧} (-\text{س} + ٧)^٢ \, ء\text{س}$

$= \pi \left[\frac{١}{٣}(\text{س} + ٣)^٣\right]_{٠}^{٢}$

$+ \pi \left[\frac{-١}{٣}(-\text{س} + ٧)^٣\right]_{٢}^{٧}$

$= \frac{٩٨}{٣}\pi + \frac{١٢٥}{٣}\pi = \frac{٢٢٣}{٣}\pi$ وحدة حجوم.

• معادلة $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ هي $\frac{\text{س}}{٧} + \frac{\text{ص}}{٣} = ١$

$\therefore \text{ص} = \frac{-٣}{٧}\text{س} + ٣$

$\therefore$ الحجم الناشئ من دوران Δ ب حـ ء

حول محور السينات

$= \frac{٢٢٣}{٣}\pi -$ الحجم الناشئ من دوران Δ ب ء أ

$= \frac{٢٢٣}{٣}\pi - \pi \int_{٠}^{٧} \left(\frac{-٣}{٧}\text{س} + ٣\right)^٢ ء\text{س}$

$= \frac{٢٢٣}{٣}\pi - \pi \left[\frac{-٧}{٩}\left(\frac{-٣}{٧}\text{س} + ٣\right)^٣\right]_{٠}^{٧}$

$= \frac{٢٢٣}{٣}\pi - ٢١\pi = \frac{١٦٠}{٣}\pi$ وحدة حجوم

التفاضل و التكامل
الرياضيات البحتة

الآن بالمكتبات

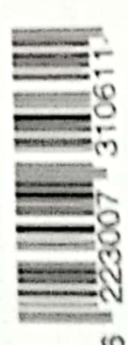
المعاصر في:

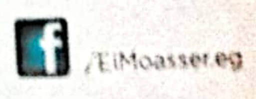
- الجبر و الهندسة الفراغية
- الاستاتيكا
- الديناميكا
- اللغة الإنجليزية
- اللغة الفرنسية

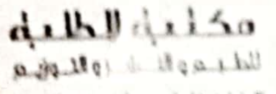


الجزء الخاص بالإجابات
يُصرف مجانًا مع الكتاب











مكتبة الطلبة
للطبع والنشر والتوزيع